Universitat de València
Facultat de Matemàtiques
Departament de Matemàtica Aplicada

Un Cálculo Funcional Para Operadores Lineales Multivaluados. Potencias Fraccionarias.

Memoria presentada por

V. Javier Pastor Murcia

para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Junio de 1996

Matemáticas

D. Celso Martínez Carracedo y D. Miguel Ángel Sanz Alix, Catedráticos de Universidad del área de Matemática Aplicada del departamento de Matemática Aplicada de la Universitat de València,

CERTIFICAN: Que la presente memoria "**Un cálculo funcional para operadores lineales multivaluados. Potencias fraccionarias**", ha sido realizada bajo su dirección por **D. Vicente Javier Pastor Murcia** y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos, firman el presente certificado, en Burjassot a 24 de Junio de 1996.

Fdo. Celso Martínez Carracedo Fdo. Miguel Ángel Sanz Alix

Aprovecho la ocasión para agradecer profundamente a los profesores Celso Martínez Carracedo y Miguel Ángel Sanz Alix la estrecha colaboración que ha permitido confeccionar esta Memoria, así como la relación de amistad que ha presidido en todo momento. Sus valiosas ideas me han servido inestimablemente en la consecución de los resultados originales que contiene este trabajo.

Asimismo hago extensivo el agradecimiento a los compañeros de la unidad de Ecuaciones Diferenciales por su ánimo y colaboración.

Finalmente, aunque no por ello en menor grado, quiero dar las gracias a mis padres y a Carmen por el ímpetu con que me han alentado constantemente.

A mis padres, a Carmen y a Alba.

Índice

Capítulo 1
Introducción.

Como indica el título, el objetivo del presente trabajo es construir un Cálculo Funcional para operadores lineales no negativos sobre un espacio de Banach no necesariamente univaluados, de forma que en el conjunto de funciones admisibles esté, al menos, z^α, con $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, con el fin de definir la potencia fraccionaria de un operador multivaluado y obtener como corolario las propiedades exigibles a una teoría satisfactoria de potencias.

Conviene resaltar la importancia de trabajar con operadores multivaluados: siempre tienen sentido los operadores clausura, inverso y adjunto de uno dado.

Ya en 1961 R. Arens en [Ar] construye un Cálculo Simbólico para relaciones lineales, es decir, para subespacios vectoriales del espacio $X \times Y$ con X e Y espacios vectoriales sobre un cuerpo K, donde las funciones admisibles son polinomios con coeficientes en el cuerpo K. Se obtienen, entre otras propiedades, la fórmula del producto, la ley de la composición y el teorema espectral cuando K es algebraicamente cerrado.

Por otra parte, en 1972 F. Hirsch en [Hi1] introduce el concepto de transformada de Stieltjes de una familia resolvente de operadores acotados, que le permite construir un Cálculo Funcional para operadores A no negativos densamente definidos, y que consiste en asociar a cada función $f(z)$ de la forma

$$f(z) = a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+tz}\, d\mu(t), \quad z \in C \setminus \mathbb{R}_-,$$

con $a \geq 0$ y μ una medida de Radon no negativa sobre $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$

con $\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{1+z}\, d\mu(t) < \infty$, es decir, $f(z^{-1})$ es una transformada de Stieltjes (véase [Hi1] o [Wi]) lo que en adelante indicaremos mediante $f(z) \in \mathfrak{T}_+$, un operador $f(A)$ determinado por

$$f(A) = \overline{a + \int_{\mathbb{R}_+} A\,(1+tA)^{-1} d\mu(t)}\ .$$

Se obtienen las siguientes propiedades:

(i) $f(A)$ es un operador no negativo.

(ii) Si $f, g \in \mathfrak{T}_+$ entonces $f \circ g \in \mathfrak{T}_+$ y

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)) \qquad (\textit{estabilidad bajo composición}).$$

(iii) Si σ_e denota el espectro esencial entonces

$$\sigma_e(f(A)) = \{f(s) : s \in \sigma_e(A)\} \qquad (\textit{teorema espectral}).$$

En el trabajo [Hi2] prueba además la siguiente propiedad:

(iv) Si $f, g \in \mathfrak{T}_+$ y el producto $f\ g \in \mathfrak{T}_+$ entonces

$$(f\ g)(A) = f(A)\ g(A)) \qquad (\textit{fórmula del producto}).$$

La teoría de Hirsch ha sufrido, cuando menos, dos extensiones. La primera se debe a E. Alaarabiou que en [Al1] extiende el Cálculo Funcional de Hirsch a operadores multivaluados no negativos A sobre un espacio de Banach complejo X. El proceso de extensión se basa en considerar una adecuada topología sobre el conjunto $\mathcal{M}$ de operadores multivaluados no negativos, de forma que el subconjunto de $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}_0 = \{A \in \mathcal{L}(X) \quad : \quad]-\infty, 0] \subseteq \rho(A)\}$$

resulta ser denso. De hecho,

$$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda + \lambda = A \quad \text{en} \quad \mathcal{M},$$

donde $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(1 - (1+\lambda A)^{-1})$ es la resolvente de Yosida del operador A. Así, para $f \in \mathfrak{T}_+$ se define $f(A)$ mediante:

$$f(A) = \lim_{\lambda \to 0} f(A_\lambda + \lambda) \quad \text{en} \quad \mathcal{M},$$

donde $f(A_\lambda + \lambda)$ se calcula a partir del Cálculo Funcional de Dunford. Destaquemos que para este Cálculo no se consiguen resultados importantes como son la fórmula del producto y el teorema espectral. Como caso particular se construye la potencia fraccionaria A^α con $0 < \alpha < 1$, obteniendo esencialmente las siguientes propiedades:

1. $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}, \ 0 < \alpha, \beta < 1,$

2. $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha, \ 0 < \alpha < 1,$

3. $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}, \ 0 < \alpha, \beta < 1 \ \text{ con } \ \alpha + \beta \leq 1,$

4. $A = \liminf_{\alpha \to 1} A^\alpha,$

quedando el teorema espectral como un problema abierto.

Las dos primeras propiedades se obtienen directamente del Cálculo Funcional, en donde se prueban vía la continuidad de $f(z)$ como aplicación de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}$, mientras que la tercera se demuestra expresamente para el caso de las potencias fraccionarias con técnicas similares a las presentadas por Martínez-Sanz-Marco en [MSM] .

La segunda extensión a la que hemos hecho referencia, de próxima aparición, se debe a Martínez-Sanz que en [MS] extienden el Cálculo Operacional de Hirsch en una doble vertiente: se amplia el conjunto de funciones admisibles de tal manera que estas son aquellas $f(z)$ para las que $f(z^{-1})$ es una transformada de Stieltjes de una medida compleja de Radon sobre $\mathbb{R}_+$ (se incluyen por tanto la función $f(z) = z^\alpha$ con $0 < \mathrm{Re}\, \alpha < 1$ y otras funciones interesantes como por ejemplo $f(z) = e^{-tz^\alpha}$, donde $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, que no pertenecen a la clase $\mathfrak{T}_+$) y por otra parte es válido para operadores univaluados no negativos no necesariamente densamente definidos.

En esta memoria, haciendo uso del Cálculo Funcional de Dunford, aunque también se podría partir del Cálculo presentado en [MS] para operadores acotados no negativos de forma que fuera posible trabajar sobre una clase de espacios más general que los espacios de Banach, construimos un Cálculo Funcional que extiende al presentado por Alaarabiou, por el hecho de admitir una clase más amplia de funciones, y al propuesto por Martínez-Sanz en el sentido de que es válido para un conjunto más amplio de operadores, mediante la definición:

$$f(A) = \liminf_{\lambda \to 0} f(A_\lambda).$$

Para este Cálculo se prueban las propiedades más deseables, que nos permiten calificarlo como tal, pero con técnicas totalmente distintas a las presentadas en [Al1], ya que para nuestras funciones base $f(z)$ no tenemos asegurada la no negatividad del operador transformado $f(A)$. La idea base consiste en "bajar" al Cálculo para operadores de $\mathcal{L}(X)$ no negativos mediante la igualdad

$$f(A)^{-1} = \tilde{f}(A^{-1}),$$

donde $\tilde{f}(z) = \frac{1}{f(z^{-1})}$, que se prueba directamente a partir de la definición, junto con un resultado que relaciona $f(A)$ con $f(A+\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$. De este último resultado se deduce que

$$f(A^*) = f(A)^*,$$

para una clase de funciones más amplia que $\mathfrak{T}_+$.

Posiblemente el mejor resultado obtenido es la llamada *fórmula de diagonalización*

$$f(A) = (1+A)f(A)(1+A)^{-1} \restriction_{\overline{D(A)}},$$

que conecta el caso general con el caso densamente definido, toda vez que permite evaluar $f(A)$ de forma más sencilla, y que es determinante para obtener la fórmula del producto y la ley de composición antes mencionadas. Se obtiene además un teorema espectral que relaciona el espectro de $f(A)$ con el de A; en particular para $f \in \mathfrak{T}_+$ se consigue una relación completa entre ambos espectros.

Nuestro Cálculo Simbólico permite como consecuencia inmediata construir la potencia fraccionaria A^α con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ obteniendo directamente del mismo, entre otras, las propiedades 1 a 3 anteriores y parte del teorema espectral. No obstante, demostramos este último resultado de dos formas diferentes: con técnicas similares a las expuestas por Balakrishnan en [Ba], que se basan en la teoría de Algebras de Banach, o con las ideas propuestas en [MS] que no necesitan de la citada teoría y que por consiguiente son válidas para espacios más generales. Además se establece, bajo ciertas condiciones, que $(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*$. Finalizamos el trabajo exponiendo algunos resultados sobre potencias de exponente α con $\operatorname{Re}\alpha < 0$ que son corolarios inmediatos de las propiedades correspondientes para cuando $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Por último, resaltar que los resultados obtenidos permiten plantearse una serie de cuestiones que deberemos, por su interés, abordar en el futuro y entre las que destacamos las dos siguientes:

a) Posibilidad de definir potencias fraccionarias imaginarias puras sin necesidad de exigir propiedades adicionales al operador A. Para $\tau \in \mathbb{R}$ podríamos definir

$$A^{i\tau} = \liminf_{\lambda \to 0} (A_\lambda + \lambda)^{i\tau},$$

donde $(A_\lambda + \lambda)^{i\tau}$ se puede calcular mediante el Cálculo Funcional holomorfo. La definición propuesta es coherente en el sentido de que, como es deseable, $A^{i0} = 1$.

b) Es de esperar que las técnicas establecidas junto con la teoría de semigrupos para operadores multivaluados propuesta por A. Yagi en [Ya] permitan obtener teoremas de existencia y unicidad para inclusiones de evolución de orden $n \in \mathbb{N}$ del tipo

$$\frac{d^n u}{dt^n} + Au \ni f(t),$$

que surgen, tras un cambio de variable, en el ámbito de las ecuaciones lineales de evolución degeneradas en la derivada temporal (véanse al respecto [FY1] y [FY2]). De hecho, cuando $n > 2$, el propio Cálculo Funcional nos proporciona directamente el semigrupo asociado $-A^{1/n}$ para $A \in \mathcal{M}$.

Capítulo 2
Operadores lineales multivaluados no negativos.

En este capítulo establecemos algunas de las propiedades más interesantes de los operadores multivaluados no negativos y de las potencias de exponente entero de los mismos. Nótese que, en principio, las potencias citadas no heredan la no negatividad; eso sí, comparten con el operador original alguna de sus características más importantes. Asimismo, se proporcionan algunos ejemplos de operadores no negativos propiamente multivaluados.

Observaremos también que en el ámbito de los operadores lineales multivaluados siempre tiene sentido considerar el inverso, el adjunto y la clausura de uno dado; de hecho, las dos primeras operaciones conservan la no negatividad.

2.1 Definiciones y propiedades.

Durante todo el trabajo mediante $(X, \|\ \|)$ denotaremos a los espacios de Banach complejos. Si R, S son subconjuntos de X entonces definimos

$$R+S=\{u+v\in X : u\in R,\ v\in S\}$$
$$\alpha R=\{\alpha u\in X : u\in R\},\quad \forall\alpha\in\mathbb{C}.$$

Definición 2.1 *Llamaremos* ***operador lineal*** *sobre X a todo subespacio vectorial A de $X\times X$, y lo indicaremos mediante $A\subseteq X\times X$.*

Como es habitual utilizaremos la siguiente notación en relación con A:

$$D(A) = \{u \in X : \exists v \in X \text{ con } (u, v) \in A\} \ ,$$

$$Au = \{v \in X : (u, v) \in A\}, \quad \forall u \in D(A),$$

$$R(A) = \{v \in Au : u \in D(A)\} \quad \text{y} \quad \operatorname{Ker} A = \{u \in D(A) : 0 \in Au\}.$$

Es fácil comprobar que la linealidad de A está caracterizada por la propiedad

$$\alpha\, Au + \beta\, Av \subseteq A(\alpha\, u + \beta\, v), \quad \forall u, v \in D(A), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Si $A0 = \{0\}$ diremos que A es un operador lineal **univaluado** o **uniforme**, utilizando el concepto de **multivaluado** para el caso general, incluyéndose por tanto a los operadores univaluados.

Es evidente que $A0$, $D(A)$ y $R(A)$ son subespacios vectoriales de X, y que si $(u, v) \in A$ entonces $Au = v + A0$.

La siguiente propiedad es útil para probar que dos operadores A y B coinciden:

$$A \subseteq B, \ D(B) \subseteq D(A) \text{ y } B0 \subseteq B0 \Rightarrow A = B.$$

Diremos que el operador A es **cerrado** si A es un subconjunto cerrado de $X \times X$, lo que implica que $A0$ es cerrado, y que es **acotado** si el conjunto

$$\{v \in Au : \|u\| \leq 1 \quad \text{y} \quad u \in D(A)\}$$

es acotado. En este último caso A es uniforme, ya que si $v \in A0$ entonces se puede obtener a una relación del tipo

$$\|v\| \leq \frac{K}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde K es una constante, y por tanto $v = 0$.

Mediante $\mathcal{L}(X)$ denotaremos el álgebra de Banach de los operadores lineales y acotados definidos sobre todo X.

Sean $A, B \subseteq X \times X$. Definimos el operador **suma** de A y B como

$$A + B = \{(u, v + w) \in X \times X : (u, v) \in A \ , \ (u, w) \in B\},$$

y el **producto por un escalar** $\alpha \in \mathbb{C}$ mediante

$$\alpha A = \{(u, \alpha v) \in X \times X : (u, v) \in A\}.$$

Cuando hablemos del operador α haremos referencia a αI donde $I = \{(u, u) \in X \times X : u \in X\}$ es la identidad sobre X.

Definimos la **composición** o **producto** de A con B, que denotaremos $A B$, mediante

$$(u, v) \in A B \Longleftrightarrow u \in D(A) \text{ y existe } w \in Au \cap D(B) \text{ tal que } (w, v) \in B.$$

Es evidente que AB es un operador lineal sobre X .

A todo operador lineal A le podemos asociar un operador que denominaremos **inverso**, y que denotaremos mediante A^{-1}, determinado por la relación

$$(u, v) \in A^{-1} \Longleftrightarrow (v, u) \in A.$$

Nótese que $A^{-1}A$ es una extensión de la identidad restringida a $D(A)$, es decir,

$$\{(u, u) \in X \times X : u \in D(A)\} \subseteq A^{-1}A,$$

y que $A A^{-1}$ extiende a la identidad sobre $R(A)$. Es un ejercicio sencillo probar que

$$A^{-1} B^{-1} = (B A)^{-1}.$$

Destaquemos en este punto que las propiedades habituales de las operaciones previamente introducidas cuando se trabaja con operadores uniformes, no son válidas en general para operadores multivaluados. Por ejemplo, se tiene:

(2.1) $\quad (\alpha + \beta) A \subseteq \alpha A + \beta A$ dándose la igualdad si $\alpha + \beta \neq 0$.

Obviamente no siempre es cierta la igualdad (si $\{0\} \subsetneq A0$ entonces $0A \subsetneq A - A$). En consecuencia, el conjunto de operadores lineales sobre X no tiene estructura de espacio vectorial. Para $A, B, C \subseteq X \times X$ tenemos:

$$A B + A C \subseteq A(B + C), \quad \text{y si } D(A) = X \text{ se da la igualdad.}$$

Sin embargo, en general no es cierta la ley distributiva. Análogamente se tiene que

$$(B + C) A \subseteq B A + C A$$

siendo iguales si A es univaluado.

A un operador $A \subseteq X \times X$ se le puede asociar un operador lineal A^* sobre el espacio dual X^*, que llamaremos **adjunto**, determinado por:

$$A^* = \{(u^*, v^*) \in X^* \times X^* : \langle v^*, u \rangle = \langle u^*, v \rangle , \quad \forall (u, v) \in A\}.$$

Proposición 2.1 *Sean $A, B \subseteq X \times X$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) *A^* es cerrado.*

(ii) *Si $A \subseteq B$ entonces $B^* \subseteq A^*$.*

(iii) *$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

(iv) *$A^*0 = \overline{D(A)}^{\perp} = \{u^* \in X^* : \langle u^*, u \rangle = 0, \quad \forall u \in \overline{D(A)}\}$ y $\operatorname{Ker} A^* = \overline{R(A)}^{\perp}$.*

(v) *A^* es univaluado si, y sólo si, A es densamente definido.*

(vi) *Si $A \in \mathcal{L}(X)$ entonces $A^* \in \mathcal{L}(X^*)$ con $\|A^*\| = \|A\|$.*

(vii) *$(\alpha A)^* = \alpha A^*$.*

(viii) *$A^* B^* \subseteq (B A)^*$. Si $B \in \mathcal{L}(X)$ entonces se da la igualdad.*

(ix) *$A^* + B^* \subseteq (A + B)^*$. Se da la igualdad siempre que $D(A^*) = X^*$ y $D(B) \subseteq D(A)$.*

Demostración. Utilícese la definición. Los apartados (v) y (vi) son consecuencia del teorema de Hahn-Banach. ■

Para un operador lineal A definimos el conjunto **resolvente** de A, $\rho(A)$, mediante:

$$\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} : (z - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\},$$

y el **espectro** de A como $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$.

Notar que si A es cerrado entonces, por el teorema de la gráfica cerrada, $z \in \rho(A)$ si, y sólo si, $z - A$ es una biyección de $D(A)$ en X. Además, si $A = X \times X$ entonces $\sigma(A) = \mathbb{C}$ incluso cuando X es un espacio vectorial de dimensión finita, lo que pone de manifiesto un comportamiento anómalo respecto del caso univaluado. Al igual que en el caso uniforme se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2 *Sea $A \subseteq X \times X$. El conjunto $\rho(A)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Si $\rho(A) \neq \varnothing$ entonces la aplicación resolvente*

$$\begin{array}{rccl} R: & \rho(A) & \to & \mathcal{L}(X) \\ & z & \to & R_z = (z-A)^{-1} \end{array}$$

es holomorfa y se verifica la identidad resolvente:

$$R_z - R_y = (y-z)R_zR_y, \quad \forall z, y \in \rho(A).$$

Demostración. Si $\rho(A) = \varnothing$ la primera afirmación es evidente. En otro caso sea $z_0 \in \rho(A)$. Para $z \in \mathbb{C}$ tenemos:

$$z - A = (1 - (z_0 - z)R_{z_0})\,(z_0 - A),$$

luego si exigimos que

$$| \, z - z_0 \, | \; \|R_{z_0}\| < 1, \tag{2.2}$$

entonces

$$R_z = R_{z_0}\,(1 - (z_0 - z)\,R_{z_0})^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

por lo que z_0 es un punto interior de $\rho(A)$.

Supongamos que $\rho(A) \neq \varnothing$ y sea $z_0 \in \rho(A)$. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ verifica la condición (2.2) entonces

$$\frac{R_z - R_{z_0}}{z - z_0} = -R_{z_0}^2\,(1 - (z_0 - z)\,R_{z_0})^{-1},$$

luego

$$\lim_{z \to z_0} \frac{R_z - R_{z_0}}{z - z_0} = -R_{z_0}^2.$$

Finalmente, $\forall y, z \in \rho(A)$ se tiene:

$$\begin{aligned} R_z - R_y &= (y-A)^{-1}(y-A)\,(z-A)^{-1} - (y-A)^{-1}(z-A)\,(z-A)^{-1} \\ &= (y-z)\,R_y\,R_z. \end{aligned}$$

■

Se puede definir un cálculo funcional para operadores lineales donde las funciones base son polinomios con coeficientes en un cuerpo K (ver [Ar]). Nosotros nos vamos a restringir a operadores A sobre X para los que

$$A0 \cap D(A) = \{0\}, \tag{2.3}$$

propiedad que veremos verifican los operadores no negativos, a sabiendas de que los resultados son válidos en el caso general, con la diferencia de ser la demostración algo más sofisticada.

Sea $p_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$ un polinomio con coeficientes complejos de grado n, $\alpha_n \neq 0$ (observar que se descarta en la definición el polinomio idénticamente nulo), y sea $A \subseteq X \times X$. Definimos $p_n(A)$ como el operador lineal

$$p_n(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0.$$

Teorema 2.1 *Sea $A \subseteq X \times X$ verificando* (2.3). *Sean $p_n(z)$ y $q_m(z)$ dos polinomios a coeficientes complejos. Se tiene:*

(i) *$D(p_n(A)) = D(A^n)$, sobreentendiendo que $A^0 = I$, y $p_n(A)0 = A0$ si $n \geq 1$.*

(ii) *Si $n \neq m$ o en el caso de ser $n = m$ se tiene que la suma de los coeficientes de mayor grado es no nula, entonces*

$$(p_n + q_m)(A) = p_n(A) + q_m(A).$$

(iii) $(p_n\, q_m)(A) = p_n(A)\, q_m(A)$.

(iv) $(p_n \circ q_m)(A) = p_n(\, q_m(A))$.

(v) *Supongamos que A es cerrado. Si $\sigma(A) = \varnothing$ entonces $\sigma(p_n(A)) = \varnothing$ y en otro caso*

$$\sigma(p_n(A)) = \{p_n(z) : z \in \sigma(A)\}.$$

Demostración. (i) La primera afirmación es evidente. Respecto de la segunda téngase en cuenta que (2.3) implica $A^s 0 = A0$ para $s = 1, 2, \ldots$

En efecto, en primer lugar $A0 \subseteq A^n 0$; la otra inclusión se prueba por inducción sobre n, ya que si $v \in A^n 0$ entonces existe $w \in A^{n-1}0 \cap D(A)$ tal que $(v, w) \in A$, pero, por la hipótesis de inducción, se tendría $w = 0$ y por tanto que $v \in A0$.

(ii) La inclusión $\subseteq$ de la igualdad propuesta es consecuencia de la propiedad (2.1) y de la conmutatividad y la asociatividad de la suma de operadores. Por otra parte, es evidente que el dominio de ambos operadores es $D(A^s)$ con $s = \text{máx}\,\{n, m\}$, y que el conjunto imagen del 0 también es el mismo en los dos casos, luego son iguales.

(iii) Comencemos probando que $(z\, p_n(z))(A) = A\, p_n(A)$. Tenemos:

$$A\, p_n(A) \supseteq \alpha_n\, A^{n+1} + \alpha_{n-1}\, A^n + ... + \alpha_1\, A^2 + \alpha_0\, A = (z\, p_n(z))(A),$$

de donde razonando como en el apartado previo se deduce la igualdad. Evidentemente $(\alpha\, p_n(z))(A) = \alpha\, p_n(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por tanto, para $\alpha \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned}(A - \alpha)\, p_n(A) &\subseteq A\, p_n(A) - \alpha\, p_n(A) = (z\, p_n(z))(A) - (\alpha\, p_n(z))(A) \\ &= ((z - \alpha)\, p_n(z))(A),\end{aligned}$$

y, por consiguiente, $(z - \alpha)(A)\, p_n(A) = ((z - \alpha)\, p_n(z))(A)$. Por último, teniendo en cuenta que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado y mediante un proceso de inducción se prueba la fórmula del producto en el caso general.

(iv) Si $p_n(z) = \alpha_n\, z^n + \alpha_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + \alpha_1\, z + \alpha_0$ se tiene:

$$\begin{aligned}p_n(\, q_m(A)) &= \alpha_n\, q_m(A)^n + \alpha_{n-1}\, q_m(A)^{n-1} + \ldots + \alpha_1\, q_m(A) + \alpha_0 \\ &= \alpha_n\, q_m^n(A) + \alpha_{n-1}\, q_m^{n-1}(A) + \ldots + \alpha_1\, q_m(A) + \alpha_0 \\ &= (p_n \circ q_m)(A),\end{aligned}$$

donde la primera identidad es consecuencia de la definición, la segunda de la fórmula del producto y la última del apartado (ii).

(v) Podemos suponer $n > 1$. Para $\delta \in \mathbb{C}$ tenemos, por la fórmula del producto, que

$$\begin{aligned}p_n(A) - \delta &= (p_n(z) - \delta)(A) \\ &= \alpha_n(A - \delta_1)(A - \delta_2)...(A - \delta_n),\end{aligned} \tag{2.4}$$

donde δ_i, $i = 1 \dots n$, son las n raíces, posiblemente repetidas, del polinomio $p_n(z) - \delta$. Si $\sigma(A) = \varnothing$ entonces de la relación (4) se sigue que $\rho(p_n(A)) = \mathbb{C}$. Sea $\delta = p_n(z_0)$ para algún $z_0 \in \sigma(A)$ y supongamos que $\delta \in \rho(p_n(A))$; por la relación (4), observando que los factores de la última igualdad conmutan, se tiene $z_0 \in \rho(A)$. Hemos probado por tanto la inclusión $\supseteq$ del enunciado. Si $\delta \in \sigma(p_n(A))$ es ya evidente que debe existir una raíz z_0 del polinomio $p_n(z) - \delta$ que esté en $\sigma(A)$, es decir, $\delta = p_n(z_0)$ con $z_0 \in \sigma(A)$. ∎

Lema 2.1 *Sea $A \subseteq X \times X$. Si $z \in \rho(A)$ entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene:*

$$R_z A^n u \subseteq A^n R_z u, \quad \forall u \in D(A^n).$$

Demostración. Si $(u, v) \in A$ entonces

$$A R_z u \ni z R_z u - u = R_z v.$$

Supongamos que el resultado se verifica para n. Si $(u, v) \in A^{n+1}$ debe existir $w \in X$ con $(u, w) \in A^n$ y $(w, v) \in A$. Por tanto,

$$A^{n+1} R_z u = A A^n R_z u \supseteq A R_z w \ni R_z v.$$

∎

Proposición 2.3 *Sea $A \subseteq X \times X$ verificando* (2.3) *y con $\rho(A) \neq \varnothing$. Se tiene que A^n es débilmente cerrado, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Vamos a probar por inducción sobre n que A^n es cerrado, de donde, al ser un operador lineal, se deduce que es débilmente cerrado. Para $n = 1$ es evidente por la hipótesis sobre el conjunto resolvente. Supongamos el resultado válido para n y comprobémoslo para $n + 1$. Sea $\{(u_m, v_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq A^{n+1}$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} (u_m, v_m) = (u, v).$$

Si $-z \in \rho(A)$ entonces por el lema anterior y la condición (2.3) obtenemos

$$(z + A)^{-1} v_m \in A^{n+1} (z + A)^{-1} u_m = A^n (u_m - z(z + A)^{-1} u_m),$$

y como

$$\lim_{m\to\infty} (u_m - z(z+A)^{-1}u_m, (z+A)^{-1}v_m) = (u - z(z+A)^{-1}u, (z+A)^{-1}v),$$

entonces por la hipótesis de inducción

$$(u - z(z+A)^{-1}u, (z+A)^{-1}v) \in A^n.$$

Por tanto $u - z(z+A)^{-1}u \in D(A^n)$, de donde, en particular, $u \in D(A)$. Finalmente,

$$v \in (z+A)(z+A)^{-1}v \subseteq (z+A)\, A^n(z+A)^{-1}Au = A^{n+1}u.$$

∎

Definición 2.2 *Diremos que $A \subseteq X \times X$ es no negativo si*

$$J_\lambda^A := (1+\lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(X), \quad \forall \lambda > 0,$$

y

$$M(A) := \sup_{\lambda>0} \left\| J_\lambda^A \right\| < +\infty.$$

Al conjunto de operadores lineales no negativos sobre X lo denotaremos por $\mathcal{M}(X)$ ($\mathcal{M}$ si no hay riesgo de confusión).

Definición 2.3 *Sea $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una red de operadores lineales sobre X. Siguiendo* [All], *llamaremos **límite inferior** de la red siguiendo $\mathcal{I}$ al operador lineal*

$$\begin{aligned} \text{lím inf } A_i = \{(u,v) \in X \times X : \exists \{(u_i,v_i)\}_{i\in\mathcal{I}} \textit{ convergente} \\ \textit{a } (u,v) \textit{ en } X \times X, \textit{donde } (u_i,v_i) \in A_i, \forall i \in \mathcal{I}\}. \end{aligned}$$

Nota 2.1 Si $A_i = A$, $\forall i \in \mathcal{I}$, entonces $A_i = \overline{A}$. También es evidente que $A = \text{lím inf } A_i$ si, y sólo si, $A^{-1} = \text{lím inf } A_i^{-1}$. Finalmente destacar que si $A_i \in \mathcal{L}(X)$, $\forall i \in \mathcal{I}$, y $\text{lím sup } \|A_i\| < +\infty$, entonces $\text{lím inf } A_i$ es un operador uniforme. Efectivamente, supongamos que $(0,v) \in \text{lím inf } A_i$, entonces existe una red $\{u_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ en X convergente a cero y tal que la red $\{A_iu_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ converge a v , por lo que

$$\|v\| \leq \text{lím sup } \|A_i\| \ \text{lím } \|u_i\| = 0.$$

Proposición 2.4 *Sea* $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *una red en* $\mathcal{L}(X)$ *con* $\text{lím sup}\ \|A_i\| < +\infty$, *y sea* $A \in \mathcal{L}(X)$. *Equivalen:*

(i) $A = \text{lím inf}\ A_i$,

(ii) $Au = \text{lím}\ A_i u$, $\forall u \in X$.

Demostración. Supongamos que $A = \text{lím inf}\ A_i$. Sea $u \in X$; existe una red $\{u_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ tal que $u_i \to u$ y $A_i u_i \to Au$. Así

$$\|A_i u - Au\| \leq \|A_i\|\ \|u_i - u\| + \|A_i u_i - Au\|,$$

luego $Au = \text{lím}\ A_i u$.

Asumamos ahora que A es el límite puntual de $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ en X. Claramente $\text{lím inf}\ A_i$ es una extensión de A y por el último comentario de la nota previa $\text{lím inf}\ A_i$ es un operador univaluado, luego son iguales. ∎

Corolario 2.1 *Sea* $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *una red en* $\mathcal{M}$ *con* $\text{lím sup}\ M(A_i) < +\infty$ *y sea* $A \in \mathcal{M}$. *Equivalen:*

(i) $A = \text{lím inf}\ A_i$,

(ii) $J_\lambda^{A_i} u$ *converge a* $J_\lambda^A u$ *siguiendo* $\mathcal{I}$, $\forall u \in X$ *y* $\forall \lambda > 0$.

En esta situación se tiene además que $M(A) \leq \text{lím inf}\ M(A_i)$.

Demostración. La equivalencia es inmediata a partir del resultado anterior. Sea $u \in X$ con $\|u\| = 1$. Tenemos

$$\left\|J_\lambda^A u\right\| = \text{lím}\ \left\|J_\lambda^{A_i} u\right\| \leq \text{lím inf}\ M(A_i)$$

y en consecuencia $M(A) \leq \text{lím inf}\ M(A_i)$. ∎

A cada operador $A \in \mathcal{M}$ le asociamos la familia de operadores acotados, llamados habitualmente **regularización Yosida** del operador A,

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(1 - J_\lambda^A), \quad \forall \lambda > 0.$$

Se tiene:

$$AJ_\lambda^A u = A_\lambda u + A0, \quad \forall u \in X,$$

y

$$A_\lambda u = J_\lambda^A A u, \quad \forall u \in D(A).$$

Nótese que en el caso general tenemos $\|A_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}(M(A)+1)$, mientras que si $A \in \mathcal{L}(X)$ se tiene la acotación uniforme $\|A_\lambda\| \leq M(A)\,\|A\|$.

Proposición 2.5 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) *$M(A) = 0$ si, y sólo si, $A = \{0\} \times X$. En otro caso $M(A) \geq 1$.*

(ii) *$A^{-1} \in \mathcal{M}$ con $J_\lambda^{A^{-1}} = 1 - J_{\lambda^{-1}}^A$, $\forall \lambda > 0$.*

(iii) *$A^* \in \mathcal{M}(X^*)$ con $M(A^*) = M(A)$.*

(iv) *Para todo $\lambda > 0$, $A_\lambda \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ con*

$$J_\mu^{A_\lambda} = \frac{1}{\mu+\lambda}(\lambda + \mu J_{\mu+\lambda}^A), \quad \forall \mu > 0,$$

y $M(A_\lambda) \leq \text{máx}\,\{M(A), 1\}$. Además

$$(A_\lambda)_\mu = (A_\mu)_\lambda = A_{\mu+\lambda}, \quad \forall \mu, \lambda > 0.$$

(v) *$A = \liminf_{\lambda \to 0} A_\lambda$ y $A^{-1} = \liminf_{\lambda \to +\infty} \lambda J_\lambda^A$.*

(vi) *Si $D(A)$ ($R(A)$) no es denso en X entonces para todo natural n se verifica que $(X \setminus \overline{D(A)}) \cap R(A^n) \neq \varnothing$ $((X \setminus \overline{R(A)}) \cap D(A^n) \neq \varnothing)$.*

Demostración. (i) Si $A = \{0\} \times X$ es evidente que A es no negativo con $M(A) = 0$, lo que no sucede en el conjunto de operadores lineales uniformes no negativos donde se tiene siempre $M(A) \geq 1$. Obsérvese que si $M(A) = 0$ entonces el operador A es el previamente citado. En otro caso existe $u \in D(A) \setminus \{0\}$ que podemos suponer unitario; entonces tomando $(u, v) \in A$ se tiene

$$\left\|u - \lambda J_\lambda^A v\right\| = \left\|J_\lambda^A u\right\| \leq M(A),$$

de donde haciendo $\lambda \to 0$ obtenemos $M(A) \geq 1$.

(ii) Sea $\lambda > 0$; por las siguientes equivalencias

$$v \in (1 + \lambda A^{-1})u \iff \lambda u \in A(v-u) \iff u = v - J_{\lambda^{-1}}^A v,$$

obtenemos que $J_\lambda^{A^{-1}} = 1 - J_{\lambda^{-1}}^{A}$ por lo que $A^{-1} \in \mathcal{M}$ con $M(A^{-1}) \leq M(A) + 1$.

(iii) Respecto del operador adjunto basta tener en cuenta que por las propiedades establecidas en la proposición 2.1 tenemos $J_\lambda^{A^*} = (J_\lambda^A)^*$, $\forall \lambda > 0$.

(iv) De las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} v = (1 + \mu A_\lambda)u &\iff z - u \in A((\lambda+\mu)u - \lambda v) \\ &\iff \mu v \in (1 + (\lambda+\mu)A)((\lambda+\mu)u - \lambda v) \\ &\iff u = \frac{1}{\mu+\lambda}(\lambda + \mu J_{\lambda+\mu}^A)v, \end{aligned}$$

se deduce

$$J_\mu^{A_\lambda} = \frac{1}{\mu+\lambda}(\lambda + \mu J_{\lambda+\mu}^A) \in \mathcal{L}(X), \quad \forall \mu > 0,$$

por lo que A_λ es no negativo con $M(A_\lambda) \leq \text{máx}\{M(A), 1\}$. Por otra parte

$$(A_\lambda)_\mu = \frac{1}{\mu}(1 - \frac{1}{\mu+\lambda}(\lambda + \mu J_{\lambda+\mu}^A)) = \frac{1}{\mu+\lambda}(1 - J_{\lambda+\mu}^A) = A_{\lambda+\mu}.$$

(v) Obsérvese en primer lugar que si $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ entonces $\text{lím}_{\lambda\to 0} A_\lambda = A$ en $\mathcal{L}(X)$ ya que

$$\|A_\lambda - A\| \leq \lambda M(A) \|A\|^2.$$

Evidentemente $\text{lím sup}_{\lambda\to 0} M(A_\lambda) < \infty$. Sean $u \in X$ y $\mu > 0$; se tiene:

$$\left\| J_\mu^{A_\lambda} u - J_\mu^A u \right\| = \mu \|(A_\mu)_\lambda u - A_\mu u\| \overset{\lambda\to 0}{\to} 0,$$

luego del corolario 2.1 se deduce que $A = \text{lím inf}_{\lambda\to 0} A_\lambda$. Tomando A^{-1} en el lugar de A se obtiene la segunda igualdad.

(vi) Sean $u \notin \overline{D(A)}$ y $\lambda > 0$. Tenemos que $(\lambda A_\lambda)^n u \in R(A^n)$ pero

$$(\lambda A_\lambda)^n u = (1 - J_\lambda^A)^n u = u + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (J_\lambda^A)^k u \notin \overline{D(A)}.$$

■

Nota 2.2 Para $A \in \mathcal{M}$ se comprueba mediante cálculos sencillos que $1 + A$ y ρA, $\rho > 0$, son operadores no negativos. En particular $J_\lambda^A \in \mathcal{M}$, $\forall \lambda > 0$.

Por otra parte $\{A_\lambda\}_{\lambda>0}$ es una familia resolvente, es decir, verifica

$$A_\lambda - A_\mu = (\mu - \lambda) A_\mu A_\lambda, \quad \forall \lambda, \mu > 0,$$

y además $\sup_{\lambda>0} \|\lambda A_\lambda\| < \infty$. En efecto, como en términos de la función resolvente $J_\lambda^A = \nu R_\nu$, donde $\nu = -\frac{1}{\lambda}$, a partir de la fórmula resolvente para R_ν se tiene

$$(\mu - \lambda) J_\mu^A J_\lambda^A = \mu J_\mu^A - \lambda J_\lambda^A, \quad \forall \lambda, \mu > 0,$$

luego

$$\begin{aligned} A_\lambda - A_\mu &= \frac{\mu - \lambda}{\lambda\mu}(1 - J_\lambda^A - J_\mu^A) + \frac{1}{\lambda\mu}(\mu J_\mu^A - \lambda J_\lambda^A) \\ &= \frac{\mu - \lambda}{\lambda\mu}(1 - J_\lambda^A - J_\mu^A + J_\mu^A J_\lambda^A) = (\mu - \lambda) A_\mu A_\lambda. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si tenemos $\{R_\lambda\}_{\lambda>0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ verificando la identidad resolvente y con $\sup_{\lambda>0} \|\lambda R_\lambda\| < \infty$, existe un único operador $A \in \mathcal{M}$ de modo que $A_\lambda = R_\lambda, \forall \lambda > 0$. Es obvio que un operador con estas características es único y debe ser $A = R_\lambda(1 - \lambda R_\lambda)^{-1}$: Comprobemos que A es independiente de λ. Sea $(u, v) \in (1 - \lambda R_\lambda)^{-1}$ entonces

$$R_\lambda(1 - \lambda R_\lambda)^{-1} u = \{R_\lambda(v + w) : w = \lambda R_\lambda w\}.$$

Para $\mu > 0$, por la identidad resolvente, se tiene:

$$(1 - \mu R_\mu) u = (1 + (\lambda - \mu) R_\mu)^{-1} u$$

de lo que se deduce

$$R_\lambda(1 - \lambda R_\lambda)^{-1} u = R_\mu(1 - \mu R_\mu)^{-1} u.$$

Intercambiando λ y μ obtenemos la igualdad buscada. Además, $J_\mu^A = 1 - \mu R_\mu$, $\forall \mu > 0$, confirmándose que $A \in \mathcal{M}$. Esta disquisición pone de manifiesto la estrecha conexión existente entre A y su regularización Yosida A_λ.

Como veremos más adelante, en la construcción del cálculo funcional, es interesante demostrar $A = \liminf_{\lambda\to 0} A_\lambda$ de forma constructiva. Observar en primer lugar que $\forall\lambda > 0$ y $\forall u \in X$

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\mu^{A_\lambda} u = J_\mu^A u,$$

ya que

$$\left\| J_\mu^{A_\lambda} u - J_\mu^A u \right\| \leq \lambda\,(M(A)+1)\,\|A_\mu u\| + \left\| J_{\lambda+\mu}^A u - J_\mu^A u \right\|.$$

Sea $(u,v) \in A$. Tenemos

$$\lim_{\lambda\to 0} J_1^{A_\lambda}(u+v) = u \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to 0} A_\lambda J_1^{A_\lambda}(u+v) = v,$$

luego $(u,v) \in \liminf_{\lambda\to 0} A_\lambda$. Supongamos ahora que $(u,v) \in \liminf_{\lambda\to 0} A$, es decir, existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ verificando

$$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to 0} A_\lambda u_\lambda = v.$$

Se prueba fácilmente que

$$\lim_{\lambda\to 0} J_1^{A_\lambda}(1+A_\lambda)u_\lambda = J_1^A(u+v),$$

luego por la unicidad del límite $u = J_1^A(u+v)$ y por tanto $(u,v) \in A$.

En la siguiente proposición se demuestra una útil caracterización de las clausuras del dominio y del rango de A, que evidentemente no tienen porqué coincidir con todo el espacio X.

Proposición 2.6 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Para cualesquiera n y m enteros positivos se tiene:*

(i) $\overline{D(A)} = \{u \in X : \lim_{\lambda\to 0} (J_\lambda^A)^n u = u\} = \{u \in X : \lim_{\lambda\to 0} (\lambda A_\lambda)^n u = 0\}$ $= \overline{D(A^n)}$,

(ii) $\overline{R(A)} = \{u \in X : \lim_{\lambda\to\infty} (J_\lambda^A)^n u = 0\} = \{u \in X : \lim_{\lambda\to\infty} (\lambda A_\lambda)^n u = u\}$ $= \overline{R(A^n)}$,

(iii) $\overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} = \overline{D(A^n) \cap R(A^m)}$.

Demostración. (i) Comencemos probando la primera igualdad para $n = 1$. Sea $u \in D(A)$; tomando $v \in Au$ arbitrario tenemos:

$$\left\| J_\lambda^A u - u \right\| \le \lambda\, M(A)\, \|v\| \overset{\lambda \to 0}{\to} 0.$$

Utilizando la equicontinuidad de la familia $\{J_\lambda^A\}_{\lambda > 0}$ y mediante un argumento del tipo $\epsilon/3$ se obtiene el resultado sobre $\overline{D(A)}$. La otra inclusión es trivial.

Para $n \ge 2$ de la cadena de desigualdades

$$\left\| (J_\lambda^A)^n u - u \right\| \le \|(1 - \lambda A_\lambda)^n u - u\| \le \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (M(A) + 1)^{k-1} \left\| u - J_\lambda^A u \right\|$$

se deduce la inclusión

$$\{u \in X : \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda^A u = u\} \subseteq \{u \in X : \lim_{\lambda \to 0} (J_\lambda^A)^n u = u\},$$

que junto con la cadena de inclusiones inmediatas

$$\{u \in X : \lim_{\lambda \to 0} (J_\lambda^A)^n u = u\} \subseteq \overline{D(A^n)} \subseteq \overline{D(A)},$$

conduce a

$$\{u \in X : \lim_{\lambda \to 0} (J_\lambda^A)^n u = u\} = \overline{D(A^n)} = \overline{D(A)}.$$

Por último, de la acotación

$$\|(\lambda A_\lambda)^n\| \le (M(A) + 1)^{n-1} \|\lambda A_\lambda\|,$$

se obtiene la inclusión

$$\overline{D(A)} \subseteq \{u \in X : \lim_{\lambda \to 0} (\lambda A_\lambda)^n u = 0\}.$$

Recíprocamente, si $\lim_{\lambda \to 0} (\lambda A_\lambda)^n u = 0$ por la fórmula del binomio de Newton se deduce

$$u = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (J_\lambda^A)^k u,$$

concluyéndose que $u \in \overline{D(A)}$ ya que $(J_\lambda^A)^k u \in D(A)$, $\forall \lambda > 0$ y $\forall k \in \{1, \dots, n\}$.

(ii) Considerar el anterior apartado para A^{-1} observando que $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$.

(iii) La inclusión $\supseteq$ es inmediata. La otra comenzaremos probándola para $n = m$. Sea $u \in \overline{D(A)} \cap \overline{R(A)}$; por el apartado previo $\lim_{\lambda \to \infty} (\lambda A_\lambda)^n u = u$. Como, por densidad, para cada $\lambda > 0$ podemos determinar $u_\lambda \in D(A^n)$ tal que $\|u_\lambda - u\| \leq 1/\lambda$ entonces

$$\|(\lambda A_\lambda)^n u - (\lambda A_\lambda)^n u_\lambda\| \leq \frac{(M(A)+1)^n}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0,$$

con lo que $\lim_{\lambda \to \infty} (\lambda A_\lambda)^n u_\lambda = u$, de donde se deduce la inclusión deseada debido a que

$$A_\lambda{}^n u_\lambda = (J_\lambda^A)^n A^n u_\lambda \in A^n (J_\lambda^A)^n u_\lambda.$$

Finalmente, en el caso general tomamos $p = \max\{n, m\}$ y se tiene:

$$\overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} = \overline{D(A^p)} \cap \overline{R(A^p)} \subseteq \overline{D(A^n)} \cap \overline{R(A^m)}.$$

■

Corolario 2.2 *Sean $A \in \mathcal{M}$, $\lambda > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) $A0 = A^n 0 = \operatorname{Ker} (J_\lambda^A)^n$. *Además* $A^n 0 \cap \overline{D(A^n)} = \{0\}$.

(ii) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^n = \operatorname{Ker} A_\lambda{}^n$ *y* $\operatorname{Ker} A^n \cap \overline{R(A^n)} = \{0\}$.

(iii) *A^n es un operador débilmente cerrado.*

(iv) *Si $\sigma(A)$ es el conjunto vacío entonces $\sigma(A^n)$ también lo es. En otro caso*

$$\sigma(A^n) = \{z^n : z \in \sigma(A)\}.$$

(v) *Si A es acotado entonces $A \in \mathcal{L}(X)$.*

Demostración. Por la proposición 2.6 se tiene $A0 \cap \overline{D(A)} = \{0\}$, luego por el teorema 2.1 $A0 = A^n 0$. Además es sencillo comprobar que

$A0 = \mathrm{Ker}\,(J_\lambda^A)^n$. Como $\overline{D(A)} = \overline{D(A^n)}$ queda demostrado el apartado (i), y el segundo es consecuencia de éste.

Los apartados (iii) y (iv) se obtienen a partir de la proposición 2.3 y el teorema 2.1 respectivamente, eso sí, teniendo presente (i).

Sabemos que si A es acotado entonces es univaluado. Sea $u \in X$; como

$$\left\| u - J_\lambda^A u \right\| = \lambda \left\| A_\lambda u \right\| \leq \lambda\, M(A)\, K \left\| u \right\|,$$

con K constante, tenemos por la proposición 2.6 que A es densamente definido. Si $u \in X$ existe una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(A)$ con $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Por ser A acotado, $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y, al ser A cerrado, se tiene $u \in D(A)$, con lo que $D(A) = X$. ■

Nota 2.3 Observar que del corolario anterior se desprende que si $A \in \mathcal{M}$ es *densamente definido* entonces A es un operador *uniforme*, y si A tiene *rango denso* entonces A es *inyectivo.*

La propiedad que probamos a continuación jugará un papel fundamental en la prueba del teorema espectral.

Proposición 2.7 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $\lambda > 0$. Si $A \in \mathcal{L}(X)$ entonces*

$$\sigma(A_\lambda) = \{\frac{z}{1+\lambda z} : z \in \sigma(A)\},$$

mientras que en otro caso

$$\sigma(A_\lambda) = \{\frac{z}{1+\lambda z} : z \in \sigma(A)\} \cup \{\frac{1}{\lambda}\}.$$

Demostración. Comencemos probando la inclusión $\supseteq$ para ambos casos. En primer lugar es evidente que $\frac{1}{\lambda} \in \rho(A_\lambda)$ si, y sólo si, $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $z \in \sigma(A)$, como A es no negativo, $z \neq -\frac{1}{\lambda}$ y, por tanto, si $\frac{z}{1+\lambda z} \in \rho(A_\lambda)$ de la relación

$$z - A = (1+\lambda z)(\frac{z}{1+\lambda z} - A_\lambda)(1+\lambda A),$$

se deduce que $z \in \rho(A)$.

Para la inclusión restante partamos de s en el complementario del conjunto $\{\frac{z}{1+\lambda z} : z \in \sigma(A)\} \cup \{\frac{1}{\lambda}\}$ y comprobemos que $(s-A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Por la elección de s tenemos que $\frac{s}{1-\lambda s} \in \rho(A)$. Como

$$s - A_\lambda \subseteq (1-\lambda s)(\frac{s}{1-\lambda s} - A)J_\lambda^A,$$

entonces $\operatorname{Ker}(z - A_\lambda) \subseteq A0$, de donde, como $s \neq \frac{1}{\lambda}$, se deduce que $\operatorname{Ker}(z - A_\lambda) = 0$. Por otra parte para $u \in X$ construimos el elemento

$$v = \frac{1}{1-\lambda s}(\frac{1}{1-\lambda s}(\frac{s}{1+\lambda s} - A)^{-1} - \lambda)u$$

y se cumple por la fórmula resolvente que $(z - A_\lambda)v = u$. En resumen, $(z - A_\lambda)^{-1}$ es un operador univaluado definido sobre todo X y cerrado, luego por el teorema de la gráfica cerrada está en $\mathcal{L}(X)$. ■

En el resultado siguiente se proporciona una red de operadores no negativos especiales, en el sentido de que están en la clase de operadores a los que se les puede aplicar el cálculo funcional de Dunford para funciones f holomorfas en $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$, que "converge" a A.

Proposición 2.8 *El conjunto* $\mathcal{M}_0 = \{A \in \mathcal{L}(X) :]-\infty, 0] \subseteq \rho(A)\}$ *es un subconjunto de* $\mathcal{M}$. *Además* $\forall A \in \mathcal{M}$, $\{A_\lambda + \lambda\}_{\lambda>0} \subseteq \mathcal{M}_0$ *y*

$$A = \liminf_{\lambda\to 0} (A_\lambda + \lambda).$$

Demostración. Para $\lambda > 0$ con $2\lambda \|A\| < 1$ se tiene

$$\left\|J_\lambda^A\right\| \leq \frac{1}{1-\lambda\|A\|} \leq 2.$$

Por otra parte $J_\lambda^A = \mu R_\mu$ con $\mu = -1/\lambda$ y puesto que la función μR_μ es continua en el compacto $[-2\|A\|, 0]$ se deduce que J_λ^A está acotada si $2\lambda\|A\| \geq 1$. Luego se puede afirmar con propiedad que $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$. Evidentemente la red $\{A_\lambda + \lambda\}_{\lambda>0}$ está en $\mathcal{M}_0$. La condición sobre el límite inferior se obtiene de forma inmediata probando directamente que

$$\liminf_{\lambda\to 0} (A_\lambda + \lambda) = \liminf_{\lambda\to 0} A_\lambda.$$

■

Pese a que el operador A no sea univaluado se pueden considerar restricciones del mismo que conservan la no negatividad con dominio denso, con rango denso, e incluso con dominio denso y rango denso, sobre espacios de Banach adecuados, algunos de los cuales nos serán útiles en la construcción del cálculo simbólico. Consideramos los subespacios cerrados de X, y que por tanto dotados de la norma del espacio son espacios de Banach, siguientes: $X_D = \overline{D(A)}$, $X_R = \overline{R(A)}$ y $X_0 = \overline{D(A)} \cap \overline{R(A)}$.

Proposición 2.9 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Se tienen las siguientes afirmaciones sobre los operadores restricción:*

(i) *$A_D = A \cap X_D \times X_D$ es no negativo y densamente definido sobre X_D.*

(ii) *$A_R = A \cap X_R \times X_R$ es no negativo sobre X_R y tiene rango denso.*

(iii) *$A_0 = A \cap X_0 \times X_0$ es no negativo sobre X_0 y tiene dominio y rango densos.*

Demostración. En los tres casos se obtiene la no negatividad si para cada uno de los subespacios cerrados Y previamente considerados se cumple $J_\lambda^A Y \subseteq Y$, $\lambda > 0$. Si $Y = X_D$ esta relación es evidente. Por otra parte $J_\lambda^A R(A) \subseteq R(A)$, inclusión que se extiende a $\overline{R(A)}$ utilizando que $J_\lambda^A \in \mathcal{L}(X)$. El caso restante es ya inmediato.

Por la proposición 2.6 tenemos:

$$\overline{D(A_D)} = \{u \in X_D : \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda^{A_D} u = u\} = \{u \in X_D : \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda^A u = u\} = X_D.$$

Por otra parte es fácil convencerse de que $(A_R)^{-1} = (A^{-1})_D$ luego tiene rango denso. Finalmente de la inclusión $D(A^2) \cap R(A) \subseteq D(A_0)$ y la proposición citada se tiene que A_0 es densamente definido. Que tiene rango denso es ya inmediato de la relación $(A^{-1})_0 = (A_0)^{-1}$. ■

Nota 2.4 El subespacio $X_+ = A0 + \overline{D(A)}$ de X es cerrado. Efectivamente, téngase presente que si $u \in D(A)$ y $v \in A0$, entonces

$$\|u\| = \lim_{\lambda \to 0} \left\| J_\lambda^A (u + v) \right\| \leq M(A)\ \|u + v\|,$$

y por consiguiente también

$$\|v\| \leq (M(A)+1)\,\|u+v\|\,,$$

En definitiva, se puede considerar $A_+ = A \cap X_+ \times X_+$ como operador sobre el espacio de Banach X_+. Obviamente es no negativo. Se tiene $\overline{D(A_+)} = \overline{D(A)}$, $\overline{R(A_+)} = A0 + \overline{D(A) \cap R(A)}$, $A_+0 = A0$ y Ker $A_+ =$ Ker A; es decir, no se mejoran las características de A.

Proposición 2.10 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si X es un espacio de Banach **reflexivo**, entonces para todo entero positivo n se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) $X = A^n 0 \oplus \overline{D(A^n)} = \mathrm{Ker}\, A^n \oplus \overline{R(A^n)}$. *En particular A es uniforme (inyectivo) si, y sólo si, tiene dominio (rango) denso.*

(ii) $D(A^n) = \{u \in X : \limsup_{\lambda\to 0} \|A_\lambda^n u\| < \infty\}$ *y* $R(A^n) = \{u \in X : \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^n \left\|(J_\lambda^A)^n u\right\| < \infty\}$.

Demostración. (i) Por la proposición 2.6 y el corolario 2.2 para probar la primera igualdad es suficiente demostrarla para $n = 1$ y, como es habitual, la segunda se obtiene considerando A^{-1}. Sea $u \in X$; como la red $\{J_\lambda^A u\}_{\lambda>0}$ está acotada, podemos determinar una subred, que denotamos de igual modo, que converge débilmente a un elemento $v \in X$ cuando $\lambda \to 0$. Como $\overline{D(A)}$ es débilmente cerrado, por ser un subespacio vectorial fuertemente cerrado, entonces $v \in \overline{D(A)}$. Además, $u - J_\lambda^A u \in A(\lambda J_\lambda^A u)$ y converge débilmente a $u - v$, por lo que, al ser A débilmente cerrado, $u - v \in A0$. Basta pues escribir $u = (u-v)+v$.

(ii) La inclusión $\subseteq$ de la primera igualdad es evidente, y la otra inclusión la probaremos por inducción sobre n. Si $u \in X$ verifica que $\limsup_{\lambda\to 0} \|A_\lambda u\| < \infty$, entonces existe una subred de $\{A_\lambda u\}_{\lambda>0}$, que denotaremos de igual modo, que converge débilmente a un elemento $v \in X$ cuando $\lambda \to 0$. Como $\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda^A u = u$ y A es débilmente cerrado, tenemos que $u \in D(A)$. Supongamos que el resultado es válido para $n-1$. Sea $u \in X$ tal que $\limsup_{\lambda\to 0} \|A_\lambda^n u\| < \infty$ entonces de la relación

$$A_\lambda^{n-1} A_1 u = (\lambda A_1 + J_1^A) A_\lambda^n u,$$

se deduce

$$\limsup_{\lambda \to 0} \left\| A_\lambda^{n-1} A_1 u \right\| < \infty,$$

de donde, por hipótesis de inducción, se llega a que $A_1 u \in D(A^{n-1})$. En particular $u \in D(A)$, y por la proposición 2.6 tenemos que $\lim_{\lambda \to 0}(J_\lambda^A)^n u = u$. Por la elección de u existe una subred de $\{A_\lambda{}^n u\}_{\lambda>0}$, que denotaremos de igual modo, que converge débilmente a un elemento $v \in X$ cuando $\lambda \to 0$. En definitiva, como A^n es débilmente cerrado, se obtiene que $u \in D(A^n)$.

La igualdad acerca del rango de A^n se obtiene, de nuevo, considerando A^{-1} en el papel de A en la relación que acabamos de probar. ■

Definición 2.4 *Sea $\omega \in [0, \pi]$. Diremos que un operador $A \subseteq X \times X$ es si*

$$\sigma(A) \subseteq S_\omega := \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \omega\} \cup \{0\},$$

y los operadores $z(z - A)^{-1}$ son uniformemente acotados para $z \in \mathbb{C} - S_\omega$. En el caso de $\omega = 0$ se entiende que $\sigma(A)$ se reduce a $\{0\}$ o es el conjunto vacío.

Obsérvese que si A es ω−sectorial entonces $A \in \mathcal{M}$ y también A^{-1} y A^* son ω−sectoriales. Recíprocamente, si $A \in \mathcal{M}$ con $M(A) = 0$ entonces A es 0-sectorial, y en otro caso se tiene, al menos, que A es π−sectorial. En el siguiente resultado se consigue una propiedad más fuerte de forma análoga al caso univaluado.

Proposición 2.11 *Sea $A \in \mathcal{M}$ con $M(A) \neq 0$ y sea $\delta = \operatorname{arc\,sen}(1/M(A))$. Entonces A es $(\pi - \delta + \epsilon)$−sectorial para todo $0 < \epsilon \leq \delta$.*

Demostración. Consideremos $z = |z| e^{i\varphi}$, con $|z| > 0$ y $\pi - \delta + \epsilon \leq |\varphi| \leq \pi$, y comprobemos que $z \in \rho(A)$. Tomando $\lambda = -|z| / \cos \varphi$, que es positivo por la elección de φ, tenemos que

$$z - A = -(1 - (\lambda + z)(\lambda + A)^{-1})(\lambda + A),$$

y como

$$\left\| (\lambda + z)(\lambda + A)^{-1} \right\| \leq M(A) \frac{|\lambda + z|}{\lambda} = M(A) \operatorname{sen} |\varphi| < 1,$$

entonces $(z - A)^{-1} = -(\lambda + A)^{-1}(1 - (\lambda + z)(\lambda + A)^{-1}))^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Además
$$\left\|z(z-A)^{-1}\right\| \leq \frac{M(A)}{1 - M(A) \text{ sen } (\delta - \epsilon)} .$$

■

Nótese que el sector donde tenemos la acotación uniforme de $z(z-A)^{-1}$ es tanto mayor cuanto menor sea $M(A)$. En particular, si $M(A) = 1$ el operador es $(\frac{\pi}{2} + \epsilon)$–sectorial para todo $0 < \epsilon \leq \frac{\pi}{2}$.

2.2 Ejemplos.

En esta sección proporcionamos una lista de operadores no negativos propiamente multivaluados. Ésta se puede ampliar con los ejemplos propuestos en las referencias [Ya] sección 5 y [FY1] sección 6.

Ejemplo 2.1 Sea $(X, (\ ,\ ))$ un espacio de Hilbert complejo. Se dice que un operador lineal $A \subseteq X \times X$ es un operador **monótono** si

$$\text{Re } (v, u) \geq 0, \quad \forall (u, v) \in A.$$

Un operador A monótono es **maximal monótono** si no admite extensiones estrictas (incluidas las no lineales) y monótonas. Se tiene que A es maximal monótono si, y sólo si, A es monótono y $R(1 + A) = X$. Si A es maximal monótono entonces A es no negativo con $M(A) = 1$. Nótese que si X es un espacio de Hilbert real y A es maximal monótono, entonces A es densamente definido, y en consecuencia, univaluado. Todas estas cuestiones se pueden consultar en ?? y ??.

Ejemplo 2.2 Para cada $A \in \mathcal{M}$ podemos construir el operador B sobre el espacio de Banach $X \times X$ mediante $D(B) = \{0\} \times D(A)$ y

$$B(0, u) = \{(v, w) : v \in X, w \in Au\}, \quad \forall u \in D(A).$$

Para todo $\lambda > 0$ se tiene que $J_\lambda^B(v, w) = (0, J_\lambda^A w)$, $\forall (v, w) \in X \times X$, y por tanto B es no negativo y siempre multivaluado lo sea A o no. Si A no es inyectivo también B es propiamente multivaluado.

Este ejemplo confirma que se pueden construir operadores no negativos con dominio cerrado estrictamente contenido en el espacio de trabajo (basta partir de $A \in \mathcal{L}(X)$ no negativo en la construcción de B), lo que no sucede si nos restringimos a los que son uniformes (utilizar el teorema de la gráfica cerrada para convencerse de ello).

Ejemplo 2.3 Como ya hemos anticipado, tenemos otras formas más naturales e interesantes que la anterior, de construir operadores no negativos propiamente multivaluados: considerar el operador inverso de un operador uniforme no negativo y no inyectivo o el adjunto de un operador no densamente definido y no negativo. Por ejemplo, sea $X = C([a,b])$ dotado de $\|\|_\infty$. Fijamos $c \in]a,b[$ y $\varphi(x) \in X$ valiendo 0 en $[a,c]$ y estrictamente en el resto del intervalo. Definimos el operador A sobre todo X mediante: $\forall \phi \in X$

$$(A\phi)(x) = \varphi(x)\phi(x) \quad , \quad \forall x \in [a,b]$$

Se tiene que $A \in \mathcal{L}(X)$, es no negativo y no es inyectivo, con lo que A^{-1} es un operador del tipo buscado.

Ejemplo 2.4 Consideremos el espacio de Banach $X = (L^\infty(0,+\infty;\mathbb{C}), \|\|_\infty)$. Definimos el operador uniforme

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{D}: & W^{1,\infty}(0,+\infty) & \to & X \\ & f & \to & -f' \end{array}$$

Evidentemente $\mathfrak{D}$ no es inyectivo. Comprobemos que $\mathfrak{D}$ es no negativo con $M(\mathfrak{D}) = 1$. Sea $\lambda > 0$. Si $f \in W^{1,\infty}(0,+\infty)$ es solución de la ecuación diferencial $f - \lambda f' = 0$, entonces existe una constante K tal que $f(x) = K\ e^{\frac{x}{\lambda}}$, pero esta función es de L^∞ si, y solamente si, $K = 0$, con lo que $1 + \lambda\mathfrak{D}$ es inyectivo.

Sea $g \in L^\infty(0,+\infty)$. Si $f \in W^{1,\infty}(0,+\infty)$ es solución de la ecuación diferencial $f - \lambda f' = g$, entonces

$$f(y)\ e^{-\frac{y}{\lambda}} - f(x)\ e^{-\frac{x}{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda}\int_x^y g(s)\ e^{-\frac{s}{\lambda}}\, ds, \quad \forall x, y \geq 0.$$

Como

$$f(y) = f(0) + \int_x^y f'(s)\, ds, \quad \forall y \geq 0,$$

se tiene que

$$\lim_{y\to\infty} f(y)\, e^{-\frac{y}{\lambda}} = 0,$$

luego

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_x^{\infty} g(s)\, e^{-\frac{s-x}{\lambda}}\, ds, \quad \forall x \geq 0,$$

Partamos de la función obtenida y comprobemos que está en $W^{1,\infty}(0,+\infty)$ y que verifica la ecuación $f - \lambda f' = g$. Tenemos trivialmente que $f \in X$. Sea $\phi \in C_c^1(]0,+\infty[)$; utilizando el teorema de Fubini se tiene:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\Big(\int_x^{\infty} g(s)\, e^{-\frac{s}{\lambda}} ds\Big)\, \phi'(x)\, dx &= \int_0^{\infty} g(s)\, e^{-\frac{s}{\lambda}}\Big(\int_0^{s} \phi'(x)\, dx\Big)\, ds \\ &= \int_0^{\infty} g(s)\, e^{-\frac{s}{\lambda}}\phi(s)\, ds,\end{aligned}$$

luego la derivada distribucional de f satisface la ecuación indicada, y de este hecho se obtiene también que $f' \in X$. Así $R(1+\lambda\mathfrak{D}) = X$.

En definitiva, $\forall\lambda > 0$ existe $(1+\lambda\mathcal{D})^{-1}$ definido sobre todo X y determinado por: $\forall g \in X$,

$$(J_\lambda^{\mathfrak{D}} g)(x) = \frac{1}{\lambda}\int_x^{\infty} g(s)\, e^{-\frac{s-x}{\lambda}}\, ds, \quad \forall x \geq 0.$$

Es ya evidente que $\mathfrak{D}$ es no negativo con $M(\mathfrak{D}) = 1$.

Tenemos pues que el operador integral $\mathfrak{J} = \mathfrak{D}^{-1}$ es un operador lineal multivaluado no negativo con dominio

$$R(\mathfrak{D}) = \{f \in L^{\infty}(0,+\infty) : \int_0^{x} f(s)\, ds \in L^{\infty}(0,+\infty)\},$$

de modo que

$$\mathfrak{J} f = \{-\int_0^{x} f(s)\, ds + K : K \in \mathbb{C}\}, \quad \forall f \in R(\mathfrak{D}).$$

Obviamente $R(\mathfrak{D})$ no es denso ya que $\mathfrak{J}$ es propiamente multivaluado. De cualquier forma esta afirmación es fácilmente constatable ya que las constantes no nulas no forman parte de $\overline{R(\mathfrak{D})}$. En efecto, si $f = k \in \overline{R(\mathfrak{D})}$, $k \neq 0$, entonces existe $g \in R(\mathfrak{D})$ tal que $\|g - f\|_{\infty} \leq k/2$, pero esto implica que, para casi todo $x > 0$, $g(x) \geq k/2$ cuando $k > 0$ o $g(x) \geq -k/2$ cuando $k < 0$, lo que en cualquier caso se opone a la elección de g en $R(\mathfrak{D})$.

Obsérvese que los anteriores razonamientos se pueden reproducir si sustituimos $]0,+\infty[$ por todo $\mathbb{R}$. De igual forma análoga se prueba que el operador derivada es no negativo con constante de no negatividad igual a 1 y no inyectivo en $X = L^\infty(-\infty, 0)$. Análogamente el operador derivada es no negativo y no es inyectivo en $L^\infty(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.5 Consideremos el espacio de Banach $X = (L^\infty(\mathbb{R}), \|\|_\infty)$. Definimos el operador uniforme

$$\begin{array}{rccc} A: & W^{2,\infty}(\mathbb{R}) & \rightarrow & X \\ & f & \rightarrow & -f'' \end{array}$$

Evidentemente A no es inyectivo y mostraremos que A es no negativo con $M(A) = 1$. Sea $\lambda > 0$. Si $f \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ es solución de la ecuación diferencial $f - \lambda f'' = 0$, entonces f es solución clásica ($f \in C^\infty(\mathbb{R})$) del problema de valores iniciales

$$u - \lambda u'' = 0; \quad u(0) = f(0), \quad u'(0) = f'(0),$$

cuya única solución es:

$$u(x) = \frac{1}{2}\left[(f(0) - \sqrt{\lambda} f'(0))\, e^{-\frac{x}{\sqrt{\lambda}}} + (f(0) + \sqrt{\lambda} f'(0))\, e^{\frac{x}{\sqrt{\lambda}}}\right], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, como f debe estar acotada necesariamente es la función nula y así el operador $1 + \lambda A$ es inyectivo.

Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Consideramos la función (obtenida mediante el método de variación de las constantes)

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[\int_{-\infty}^{x} g(s)\, e^{\frac{s-x}{\sqrt{\lambda}}}\, ds + \int_{x}^{\infty} g(s)\, e^{-\frac{s-x}{\sqrt{\lambda}}}\, ds\right], \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y comprobemos que $f \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ y que es solución de la ecuación diferencial $f - \lambda f'' = g$. Evidentemente $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Calculamos las derivadas distribucionales primera y segunda de f obteniendo:

$$f'(x) = \frac{1}{2\lambda}\left[-\int_{-\infty}^{x} g(s)\, e^{\frac{s-x}{\sqrt{\lambda}}}\, ds + \int_{x}^{\infty} g(s)\, e^{-\frac{s-x}{\sqrt{\lambda}}}\, ds\right] \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{1}{\lambda}(f-g),$$

de donde se deducen las propiedades deseadas. Por tanto, $R(1 + \lambda A) = L^\infty(\mathbb{R})$. Es ya inmediato que A es no negativo con $M(A) = 1$.

Tenemos pues que el operador A^{-1} es un operador lineal propiamente multivaluado no negativo definido sobre

$$R(A) = \{f \in L^{\infty}(\mathbb{R}) : g(x) := \int_0^x f(s)\,ds \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ y } \int_0^y g(x)\,dx \in L^{\infty}(\mathbb{R})\},$$

mediante

$$A^{-1}f = \{-\int_0^y g(x)\ dx + Ky + L : K, L \in \mathbb{C}\}, \quad \forall f \in R(A).$$

Capítulo 3
Cálculo Funcional sobre $\mathcal{M}$ asociado a transformadas de Stieltjes.

Puesto que vamos a construir un Cálculo Funcional (también se utilizan las expresiones Cálculo Simbólico o Cálculo Operacional), es interesante comenzar estableciendo lo que entendemos con este término.

Definición 3.1 *Sea $\mathfrak{L}$ el conjunto de todos los operadores lineales sobre el espacio de Banach X. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Para una clase $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}$ que contenga a los operadores de la forma zI para $z \in \Omega$, y para una clase $\mathcal{H}$ de funciones definidas en Ω con valores en $\mathbb{C}$, diremos que una aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} \times \mathfrak{N} & \rightarrow & \mathfrak{L} \\ (f, A) & \rightarrow & f(A) \end{array}$$

*es un **Cálculo Funcional** sobre $\mathfrak{N}$ si, $\forall f \in \mathcal{H}$, verifica*

$$f(zI) = f(z)I, \quad \forall z \in \Omega.$$

En la siguiente sección estudiamos la clase de funciones numéricas sobre las que vamos a definir el Cálculo Simbólico: aquellas que, tras invertir la variable, son transformadas de Stieltjes de una medida compleja de Radon μ sobre $[0, \infty[$.

3.1 Las clases de funciones $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_+$, $\mathcal{T}_0$ y $\mathcal{S}_0$

La demostración de los resultados que detallamos a continuación se ha extraído de [MS]. No obstante, los teoremas concernientes a la clase $\mathcal{T}_+$ ya habían sido probados por F. Hirsch en [Hi1].

Utilizaremos la notación $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ y $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$. Consideramos el espacio $C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ de las funciones continuas con soporte compacto definidas sobre $\mathbb{R}_+$ dotado de la τ topología, es decir, las redes convergentes son aquellas que convergen uniformemente en $\mathbb{R}_+$ de modo que los soportes de todas las funciones de la red están contenidos en un compacto común. Por $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ denotaremos el espacio de funciones continuas que se anulan en ∞ dotado de $\|\|_\infty$, y mediante $C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ haremos referencia al espacio de funciones continuas y acotadas dotado de la misma norma. Recuérdese que $C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ es denso en $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

Identificamos las medidas complejas de Radon sobre $\mathbb{R}_+$ con las formas lineales y continuas μ sobre $C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. Por el teorema de Riesz-Markov μ se puede representar formalmente mediante $\mu = \mu_1 - \mu_2 + (\mu_3 - \mu_4)\, i$, donde μ_i es una medida no negativa de Radon para $1 \leq i \leq 4$. Además por el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym se tiene que existe una medida no negativa de Radon ν sobre $\mathbb{R}_+$ y una función $\rho : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente integrable respecto de ν, tales que $d\mu = \rho\, d\nu$. Finalmente la variación total $|\mu|$ de la medida viene dada por $d\,|\mu| = |\rho|\, d\nu$.

Definición 3.2 *Sea μ una medida compleja de Radon sobre $\mathbb{R}_+$ verificando que existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ con*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{|z_0 + t|}\, d\,|\mu|\,(t) < \infty, \tag{3.1}$$

y sea $a \in \mathbb{C}$. Llamaremos ***transformada de Stieltjes*** *de la medida μ con valor a en el infinito a la función $f(z) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{C}$ determinada por:*

$$f(z) = a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z + t}\, d\mu(t).$$

La condición (3.1) asegura que la función f está bien definida. Efectivamente, basta observar que para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ se tiene la acotación

$$\frac{1}{|z + t|} \leq \frac{1}{|z_0 + t|}\, (1 + C(z)\; |z_0 - z|),$$

donde
$$C(z) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|}, & \text{si } \mathrm{Im}\, z \neq 0 \\ \frac{1}{\mathrm{Re}\, z}, & \text{si } \mathrm{Im}\, z = 0 \end{cases}.$$
Por convergencia dominada
$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ (z>0)}} f(z) = a$$
por lo que escribiremos $f(\infty) = a$.

Proposición 3.1 *Si $f(z)$ es la transformada de Stieltjes de una medida μ, ésta está únivocamente determinada.*

Demostración. Supongamos que $f(z)$ es transformada de Stieltjes de dos medidas μ_1 y μ_2, es decir,
$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, d\mu_2(t), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-,$$
y comprobemos que μ_1 y μ_2 son iguales. Comencemos probando por inducción completa sobre $n \in \mathbb{N}$ que
$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(z+t)^n}\, d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(z+t)^n}\, d\mu_2(t), \quad \forall z > 0. \tag{3.2}$$
Para $n = 1$ es evidente. Supongamos que se cumple para $1, 2, \ldots, n$. Sea $z > 0$ fijo; por el teorema de convergencia dominada
$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(z+t)^{n+1}}\, d\mu_i(t) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+\epsilon+t} \frac{1}{(z+t)^n}\, d\mu_i(t), \quad i = 1, 2,$$
mientras que desarrollando en fracciones simples y por la hipótesis de inducción
$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+\epsilon+t} \frac{1}{(z+t)^n}\, d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+\epsilon+t} \frac{1}{(z+t)^n}\, d\mu_2(t), \quad \forall \epsilon > 0.$$
Por tanto, se verifica la relación (3.2) para $n+1$. Por el teorema de Stone-Weierstrass (versión compleja para espacios de Hausdorff localmente compactos), el álgebra compleja generada por la función $\frac{1}{1+t}$ es

densa en $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. En consecuencia, teniendo en cuenta que las medidas $\frac{1}{1+t}\, d\mu_i(t)$ son finitas ($i = 1, 2$), se deduce, por convergencia uniforme, que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+t}\, \psi(t)\, d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+t}\, \psi(t)\, d\mu_2(t), \quad \forall \psi \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}).$$

En particular, si $\varphi(t) \in C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ entonces, tomando $\psi(t) = (1+t)\varphi(t) \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ en la anterior relación, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, d\mu_2(t).$$

Por consiguiente, $\mu_1 = \mu_2$. ∎

En definitiva, las transformadas de Stieltjes están unívocamente determinadas por la medida μ y por el valor de a. Por ello, en adelante utilizaremos la notación $f(z) = (a, \mu)(z)$ para indicar de que transformada de Stieltjes estamos hablando. Al conjunto de transformadas de Stieltjes lo denotaremos por $\mathcal{S}$ (nótese que $\mathcal{S}$ dotado de la suma de funciones y del producto por un escalar habituales tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$). Por $\mathcal{S}_+$ entenderemos la subclase de $\mathcal{S}$ formada por las funciones $f(z) = (a, \mu)(z)$ con $a \geq 0$ y $\mu \geq 0$, y finalmente

$$\mathcal{S}_0 = \{f(z) = (a, \mu)(z) \in \mathcal{S} : \ \mu(\{0\}) \ = \ 0 \text{ y } \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\,|\mu|\,(t) < \ \infty\}.$$

Proposición 3.2 *Sea $f(z) = (a, \mu)(z)$. Se tiene que $f(z)$ es analítica en el abierto $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Si $f(z) \in \mathcal{S}_+$ y no es idénticamente nula, entonces sus valores permanecen en el abierto $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, y si además no es constante, su restricción a $]0, \infty[$ es real, positiva y estrictamente decreciente.*

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Es obvio que

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(z+t)(z_0+t)}\, d\mu(t),$$

lo que junto con la acotación

$$\frac{1}{|z+t|\,|z_0+t|} \leq \frac{1}{|z_0+t|} \begin{cases} \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}, & \text{si } \operatorname{Im} z \neq 0 \text{ y } \operatorname{Re} z \leq 0 \\ \min\{\frac{1}{|\operatorname{Im} z|}, \frac{1}{\operatorname{Re} z}\}, & \text{si } \operatorname{Im} z \neq 0 \text{ y } \operatorname{Re} z > 0 \\ \frac{1}{\operatorname{Re} z}, & \text{si } \operatorname{Im} z = 0 \end{cases},$$

que permite utilizar convergencia dominada, conduce a que existe $f'(z_0)$ y vale

$$-\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(z_0+t)^2}\, d\mu(t).$$

Supongamos de aquí en adelante que $f(z) \in \mathcal{S}_+$ y no es idénticamente nula. Si $\mu = 0$ entonces $a > 0$ con lo que trivialmente $f(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-) \subseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. En otro caso,

$$f(z) = a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\operatorname{Re} z + t}{|z+t|^2}\, d\mu(t) - i\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\operatorname{Im} z}{|z+t|^2}\, d\mu(t), \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,$$

luego si $\operatorname{Im} f(z) = 0$ se tiene $\operatorname{Im} z = 0$ y en consecuencia $\operatorname{Re} f(z) > 0$ pues $\operatorname{Re} z > 0$. Se verifica por tanto la inclusión deseada.

Si suponemos que $f(z)$ no es constante, entonces μ no es idénticamente nula, por lo que $f(z)$, $z > 0$, hereda el carácter estrictamente decreciente de la función $\frac{1}{z+t}$ como función de z. ∎

Nótese que $f(z) = \frac{1}{Z} - \frac{2}{Z+1} \in \mathcal{S}$ no es idénticamente nula y $f(1) = 0$. Si $f(z) \in \mathcal{S}_+$ tiene sentido siempre $\lim_{z\to 0(z>0)} f(z)$ cantidad que, aún en el caso de ser $+\infty$, denotaremos por $f(0)$. También para las funciones $f(z) \in \mathcal{S}_0$ se tiene, por convergencia dominada, que existe el anterior límite y vale a $a + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\mu(t)$.

Teorema 3.1 *Si una sucesión de transformadas de Stieltjes* $f_n(z) = (a_n, \mu_n)(z) \in \mathcal{S}_+$ *converge puntualmente a una función* $f(z)$ *sobre* $]0,\infty[$, *ésta es la restricción a* $]0,\infty[$ *de una función* $\hat{f}(z) = (a,\mu)(z) \in \mathcal{S}_+$ *y las medidas* μ_n *convergen vagamente a la medida* μ, *es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, d\mu_n(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, d\mu(t), \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}).$$

Si además $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *entonces las medidas finitas* $\frac{1}{z+t}\, d\mu_n(t)$ *convergen estrechamente a la medida finita* $\frac{1}{z+t}\, d\mu(t)$ *para cualquier* $z > 0$, *es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\psi(t)}{z+t}\, d\mu_n(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\psi(t)}{z+t}\, d\mu(t), \quad \forall \psi \in C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}).$$

Demostración. Dividimos la prueba en varias fases:

1. *Construcción de la medida* μ.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ construimos las formas lineales sobre $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$

$$v_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi(t)}{1+t}\, d\mu_n(t), \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}),$$

que son equiacotadas pues

$$\|v_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(1).$$

Consideramos el conjunto de funciones de $t \geq 0$

$$\mathcal{A} = \{\frac{1}{z+t} : z > 0,\ z \neq 1\} \subseteq C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$$

y sobre éste la aplicación

$$\begin{aligned} v(\frac{1}{z+t}) = \lim_{n\to\infty} v_n(\frac{1}{z+t}) &= \frac{1}{z-1} \lim_{n\to\infty} ((f_n(1) - a_n) - (f_n(z) - a_n)) \\ &= \frac{1}{z-1}(f(1) - f(z)), \end{aligned}$$

que extendemos por linealidad al subespacio vectorial generado por $\mathcal{A}$ que denotamos $\langle \mathcal{A} \rangle$. La clausura en $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ de $\langle \mathcal{A} \rangle$ contiene al álgebra compleja engendrada por la función $\frac{1}{1+t}$ que es densa en $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. La equicontinuidad de $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ junto con la densidad anunciada permiten extender v al espacio $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ como forma lineal positiva y continua verificando

$$v(\varphi) = \lim_{n\to\infty} v_n(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}).$$

Por el teorema de Riesz-Markov existe una única medida de Radon sobre $\mathbb{R}_+$, μ_0, no negativa y finita, tal que

$$v(\varphi) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, d\mu_0(t), \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}).$$

Finalmente, definimos la medida μ mediante $d\mu(t) = (1+t)\, d\mu_0(t)$. Si $\mathcal{B} = \{\varphi(t) : (1+t)\varphi(t) \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})\} \supseteq C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, se tiene que toda $\varphi(t) \in \mathcal{B}$ es $\mu(t)$-integrable y

$$\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\ d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\ d\mu_n(t),$$

y por tanto se verifica la convergencia vaga del enunciado.

2. *$f(z)$ es la restricción a $]0,\infty[$ de una función de $\mathcal{S}_+$.*

Sea $z > 0$. Consideramos la sucesión creciente de funciones de $\mathcal{B}$, $\frac{m}{(m+t)(z+t)}$, $m \in \mathbb{N}$, que converge puntualmente a $\frac{1}{z+t}$ en $\mathbb{R}_+$. Para $m > z$ tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{m}{(m+t)(z+t)}\, d\mu(t) = \frac{m}{m-z}(f(z) - f(m)),$$

luego, por el teorema de convergencia monótona,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, d\mu(t) = f(z) - f(\infty),$$

donde se sobreentiende que $f(\infty) = \lim_{m\to\infty} f(m)$ que existe es finito y no negativo, ya que $f(z)$ es decreciente y toma valores no negativos al ser límite puntual de funciones con dichas características. Por consiguiente, $f(z)$ es la restricción a $]0,\infty[$ de $(f(\infty),\mu)(z) \in \mathcal{S}_+$.

3. *Si $\lim_{n\to\infty} a_n = f(\infty)(= a)$ entonces las medidas finitas $\frac{1}{z+t}\, d\mu_n(t)$ convergen estrechamente a la medida finita $\frac{1}{z+t}\, d\mu(t)$, $\forall z > 0$.*

Sean $\psi \in C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ y $z > 0$. Consideramos un natural $m > z$; se tienen las estimaciones siguientes:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, \psi(t)\, d\mu_n(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{m}{(m+t)(z+t)}\, \psi(t)\, d\mu_n(t) \right| \\ \leq \;& \|\psi\| \left(\frac{z}{m-z} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(z) + \frac{m}{m-z}(f_n(m) - a_n)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, \psi(t)\, d\mu(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{m}{(m+t)(z+t)}\, \psi(t)\, d\mu(t) \right| \\ \leq \;& \|\psi\| \left(\frac{z}{m-z}\, f(z) + \frac{m}{m-z}(f(m) - a)\right). \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Evidentemente existe m_1 a partir del cual el segundo miembro de la segunda estimación es menor que $\epsilon/3$. También existe m_2 tal que las cantidades $\frac{z}{m-z} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ y $f(m) - a$ sean suficientemente pequeñas para los naturales posteriores. Sea $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Teniendo en cuenta la descomposición

$$f_n(m_0) - a_n = (f_n(m_0) - f(m_0)) + (a - a_n) + (f(m_0) - a)$$

se comprende, recordando la hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, que existe un n_0 tal que, $\forall n \geq n_0$, el segundo sumando de la primera estimación, calculada para m_0, es menor que $\epsilon/3$. Por otra parte, como $\phi(t) = \frac{m_0}{(m_0+t)(z+t)}\ \psi(t) \in \mathcal{B}$, existe un n_1 tal que, $\forall n \geq n_1$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)\, d\mu_n(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)\, d\mu(t)\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Finalmente, utilizando las relaciones obtenidas, tenemos que $\forall n \geq$ máx $\{n_0, n_1\}$

$$\left|\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\ \psi(t)\, d\mu_n(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\ \psi(t)\, d\mu(t)\right| < \epsilon.$$

■

Teorema 3.2 *Sea $f(z) \in \mathcal{S}_+$. Las funciones $f_\lambda(z) = \frac{f(z)}{1+\lambda f(z)}$, $\lambda > 0$, y la función $\tilde{f}\,(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$, si $f(z)$ no se anula, permanecen en la clase $\mathcal{S}_+$.*

Demostración. Si $f(z)$ es constante el resultado es trivial, por lo que asumimos que esto no sucede. Sea $z > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ dividimos el intervalo $[0, n]$ en n^2 subintervalos de igual longitud y llamamos $t_0, t_1, \ldots t_{n^2}$ a los puntos de la partición resultante. Construimos la función escalonada

$$\psi_{n,z}(t) = \begin{cases} \frac{1}{z+t_p}, & \text{si } t \in [t_{p-1}, t_p[,\ p = 1, 2, \ldots n^2 \\ 0, & \text{si } t \in [t_{n^2}, \infty[\end{cases}.$$

Se comprueba que

$$\lim_{n\to\infty}\ \psi_{n,z}(t) = \frac{1}{z+t}, \quad \forall t \geq 0,$$

deduciéndose, por convergencia dominada, que

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} (a + \int_{\mathbb{R}_+} \psi_{n,z}(t)\, d\mu(t)) = \lim_{n\to\infty} (a + \sum_{1\leq p\leq n^2} \frac{c_p}{z+t_p}), \quad \forall z > 0,$$

donde $c_p = \mu([t_{p-1}, t_p[)$, $1 \leq p \leq n^2$. Por tanto, $f(z)$ es límite puntual en $]0, \infty[$ de una sucesión de funciones cada una de ellas de la forma

$$\alpha + \sum_{1\leq p\leq m} \frac{A_p}{z+a_p}, \tag{3.3}$$

con α, a_p, A_p $(p = 1, \ldots, m)$ constantes no negativas, y el lema siguiente permite afirmar lo mismo de $f_\lambda(z)$ y $\tilde{f}(z)$. Como las funciones del tipo (3.3) están en $\mathcal{S}_+$, el teorema 3.1 nos permite afirmar que tanto $f_\lambda(z)$ como $\tilde{f}(z)$ están en $\mathcal{S}_+$. ■

Lema 3.1 *Si $h(z)$, $z > 0$, es de la forma (3.3) entonces las funciones $h_\lambda(z) = \frac{h(z)}{1+\lambda h(z)}$, $\lambda > 0$, y la función $\tilde{h}(z) = \frac{1}{h(\frac{1}{z})}$, siempre que $h(z)$ no se anule, admiten un desarrollo del mismo tipo.*

Demostración. Hagamos la prueba para el primer caso. Un razonamiento análogo es válido para la segunda situación. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A_p > 0$, $p = 1, \ldots, m$, y que $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_m$. Como $h(z)$ es estrictamente decreciente en todo su dominio entonces la ecuación $h(z) = -\frac{1}{\lambda}$ tiene exactamente m soluciones situadas en los intervalos $]-\infty, -a_m[,]-a_m, -a_{m-1}[, \ldots,]-a_2, -a_1[$. Por otra parte, podemos escribir

$$h_\lambda(z) = \beta + \frac{P(z)}{Q(z)},$$

con $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios, grado $(P(z)) <$ grado $(Q(z))$, y β constante no negativa, ya que $\beta = \lim_{z\to\infty} h_\lambda(z)$. Dado que las soluciones de $h(z) = -\frac{1}{\lambda}$ son raíces del polinomio $Q(z)$, entonces el desarrollo en fracciones simples de $h_\lambda(z)$ es de la forma

$$h_\lambda(z) = \beta + \sum_{1\leq p\leq m} \frac{B_p}{z + b_p},$$

con $b_p \geq 0$, $p = 1, \ldots, m$. Además, puesto que

$$B_p = \lim_{z\downarrow -b_p} (z + b_p)\, h_\lambda(z),$$

se tiene $B_p \geq 0$, $p = 1, \ldots, m$. ■

Nota 3.1 Para $f(z) \in \mathcal{S}_+$, si $f_\lambda(z) = (a_\lambda, \mu_\lambda)(z)$, como existe $\lim_{z\to 0 (z>0)} f_\lambda(z) < \infty$ y $f_\lambda(z) \geq \mu_\lambda(\{0\})\, z^{-1}$ entonces $\mu_\lambda(\{0\}) = 0$. Finalmente, por el teorema de convergencia monótona, $\frac{1}{t}$ es $\mu_\lambda(t)$-integrable y

$$\int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\mu_\lambda(t) = f_\lambda(0) - f_\lambda(\infty).$$

Obsérvese que tenemos $f_\lambda(z)\in\mathcal{S}_0$, $\forall\lambda > 0$.

Definición 3.3 *Introducimos la clases de funciones siguientes:*

$$\mathcal{T} = \{\ f(z) : f(z^{-1}) \in \mathcal{S}\} \quad , \quad \mathcal{T}_+ = \{\ f(z) : f(z^{-1}) \in \mathcal{S}_+\},$$

y $\mathcal{T}_0$ *como el subconjunto de funciones* $f(z) \in \mathcal{T}$ *que no se anulan con* $\tilde{f}\in \mathcal{T}$ *y* $\tilde{f}\ (0) = 0$.

Se tiene la inclusión $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{T}$. En efecto, si $f(z) = (a,\mu)(z) \in \mathcal{S}_0$, entonces $f(z)$ también se puede expresar en la forma

$$f(z) = b + \int_{]0,\infty[} \frac{z}{1+sz}\, d\nu(s), \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,$$

con $b = a + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\mu(t)$, $d\nu(s) = -s^2 d\mu(s^{-1})$ en $]0,\infty[$ y $\nu(\{0\}) = 0$.

No es cierto que si $f(z) \in \mathcal{T}$ no se anula entonces $\tilde{f}\ (z) \in \mathcal{T}$ pues si tomamos $f(z) \in \mathcal{S}_0$ con $f(\infty) = 0$, como sucede por ejemplo con $f(z) = (0, te^{-t}dt)(z)$ o $f(z) = 1/(1+z)$, entonces $\tilde{f}\ (z) \notin \mathcal{T}$ ya que no existe $\tilde{f}\ (0)$.

La condición $\tilde{f}\ (z) \in \mathcal{T}$ implica que $\lim_{z\to\infty(z>0)} 1/f(z)$ existe y vale $\tilde{f}(0)$. Si $\tilde{f}(0) = 0$ entonces

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\(z>0)}} |f(z)| = \lim_{\substack{z\to\infty\\(z>0)}} \left(|a| + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+tz}\, d\,|\mu|\,(t)\right) = \infty,$$

y por tanto, si $\mu(\{0\}) = 0$, se tiene

$$\int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\,|\mu|\,(t) = \infty.$$

Si $\tilde{f}\ (0) \neq 0$ entonces

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\(z>0)}} f(z) = \frac{1}{\tilde{f}\ (0)},$$

de donde se deduce que $f(z)$, para $z > 0$, está acotada. Por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\(z>0)}} \frac{f(z)}{z} = \mu(\{0\}), \quad \forall f(z) \in \mathcal{T},$$

luego bajo nuestra hipótesis $\mu(\{0\}) = 0$.

De lo que acabamos de razonar se deduce que $\mathcal{T}_+$ es la unión disjunta de $\mathcal{T}_+ \cap \mathcal{T}_0$ y $\mathcal{T}_+ \cap \mathcal{S}_0$.

Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ no toma el valor nulo y $\tilde{f}\,(z) = (\tilde{a}, \tilde{\mu}\,)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ entonces $\bar{f}(z) = z/f(z) \in \mathcal{T}$ con $\bar{f}(z) = (\tilde{\mu}\,(\{0\}), \bar{\mu})(z^{-1})$ donde $\bar{\mu}(\{0\}) = \tilde{a}$ y $d\bar{\mu}(s) = s\, d\,\tilde{\mu}\,(s^{-1})$ en $]0, \infty[$. Nótese que si $f(z) \in \mathcal{T}_+$ no es idénticamente nula, entonces $\bar{f}(z) \in \mathcal{T}_+$. Además, existe $\tilde{\bar{f}}\,(z) = \bar{\tilde{f}}\,(z) \in \mathcal{T}$ y

$$\tilde{\bar{f}}\,(0) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ (z>0)}} z\, f(z^{-1}) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ (z>0)}} (a\, z + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{z+t} d\mu(t)) = \mu(\{0\}),$$

donde la última identidad se obtiene utilizando convergencia dominada en el límite de la integral. En consecuencia $\bar{f}(z) \in \mathcal{T}_0$ si, y sólo si, $\mu(\{0\}) = 0$, lo que sucede seguro cuando $\tilde{f}\,(0) \neq 0$.

El producto de dos funciones de $\mathcal{T}$ no tiene porqué pertenecer a $\mathcal{T}$. Basta considerar que $f(z) = z \in \mathcal{T}_+$ y sin embargo $g(z) = z^2 \notin \mathcal{T}$ (de hecho, como $i^2 = -1$ se puede afirmar directamente que $z^2 \notin \mathcal{T}_+$).

Teorema 3.3 *Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}_+$) y $g(z) = (b, \nu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_+$ entonces $(f \circ g)(z) \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}_+$).*

Demostración. Sean $\nu_0 = \nu$ y ν_t la medida no negativa de Radon asociada a $g_t(z) = g(z)/(1 + tg(z)) \in \mathcal{T}_+$, $\forall t > 0$. Para $\varphi \in C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ la función sobre $\mathbb{R}_+$

$$t \to \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s)\, d\nu_t(s)$$

es continua por el teorema 3.1, y además, si $\operatorname{sop}\varphi \subseteq [0, N]$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s)\, d\nu_t(s) \right| &\leq \|\varphi\|\, (1+N) \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+s}\, d\nu_t(s) \\ &= \|\varphi\|\, (1+N)(g_t(1) - \frac{b}{1+tb}), \end{aligned}$$

con lo que resulta ser $\mu(t)$-integrable. Podemos pues definir la forma lineal

$$\omega(\varphi) = \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s)\, d\nu_t(s))\, d\mu(t), \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}),$$

y vamos a comprobar que es continua, de tal suerte que habremos determinado una medida de Radon compleja (no negativa si μ lo es, ya que en ese caso la forma lineal es positiva) sobre $\mathbb{R}_+$ que denotaremos ω. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_c(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$, τ-convergente a cierta función φ. Por tanto, $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{sop}\varphi_n$ es acotado y la sucesión es uniformemente convergente. Sea $K \geq 0$ tal que $\|\varphi_n\| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y sea $\phi \in C_c(\mathbb{R}_+,[0,1])$ verificando $\phi(s) = 1$, $\forall s \in S$. Entonces la desigualdad

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_n(s)\, d\nu_t(s) \right| \leq K \int_{\mathbb{R}_+} \phi(s)\, d\nu_t(s),$$

permite aplicar convergencia dominada para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \omega(\varphi_n) = \omega(\varphi).$$

Para finalizar la prueba, determinamos una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_c(\mathbb{R}_+,[0,1])$ monótona creciente y convergente puntualmente a la unidad. Sea σ la medida de Radon no negativa asociada a la forma lineal positiva $\int_{\mathbb{R}_+}(\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(s)\, d\nu_t(s))\, d|\mu|(t)$. Para $z > 0$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi_n(t)\, \frac{z}{1+t\,z}\, d\sigma(t) = \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}_+} \phi_n(s)\, \frac{z}{1+s\,z} d\nu_t(s))\, d|\mu|(t),$$

de donde, aplicando convergencia monótona, se sigue que $\frac{z}{1+tz}$ es $\sigma(t)$-integrable. Como para todo conjunto de Borel B de $\mathbb{R}_+$ tenemos $|\omega|(B) \leq \sigma(B)$, por la definición de las medidas ω y σ y su regularidad, entonces $\frac{z}{1+tz}$ es $\omega(t)$-integrable. Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi_n(t)\, \frac{z}{1+t\,z}\, d\omega(t) = \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}_+} \phi_n(s)\, \frac{z}{1+s\,z} d\nu_t(s))\, d\mu(t),$$

de donde por convergencia dominada se deduce

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+t\,z}\, d\omega(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+s\,z}\, d\nu_t(s) \right) d\mu(t).$$

Ahora ya es sencillo comprobar que $(f\circ g)(z) = (f(b),\omega)(z^{-1})$, $z > 0$, y por analiticidad la identidad es válida en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, quedando así de manifiesto que $f\circ g \in \mathcal{T}$. ■

A continuación, vamos a proporcionar algunas funciones interesantes que están en la clase $\mathcal{T}$. La lista se puede completar consultando la referencia clásica [Wi] o [Er] donde se proporciona una tabla de transformadas de Stieltjes.

Ejemplo 3.1 Sea $\alpha = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ con $|\alpha|^2 < \mathrm{Re}\ \alpha$ (lo que implica que $0 < \sigma < 1$ y $\tau \neq 0$). Es fácil comprobar que si elegimos $\mu \in \mathbb{C}$ con

$$|\mu| = e^{(\pi + \arg \mu)\ \frac{\sigma}{\tau}},$$

entonces $\mu \in \Omega_\alpha = \mathbb{C}^* \setminus \{\lambda^\alpha\ e^{i\alpha\theta} : \lambda > 0,\ \theta \in [-\pi, \pi]\}$, y que si $\mu \in \Omega_\alpha$ entonces $\mu^{-1} \in \Omega_\alpha$. Elegimos μ tal que $-\mu \in \Omega_\alpha$ con lo que la función $f(z) = (\mu + z^{-\alpha})^{-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$; consideramos $0 < r < |z| < R$ y $0 < \epsilon < \pi/2$, de forma que z esté en el interior de la curva Γ formada por la unión de las siguientes curvas:

$$\Gamma_1 = \ \left\{R\ e^{i\varphi} :\ \varphi \in [-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]\right\}, \Gamma_2 = \ \left\{r\ e^{i\varphi} :\ \varphi \in [-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]\right\},$$

$$\Gamma_3 = \ \left\{t\ e^{i(-\pi+\epsilon)} :\ t \in [r, R]\right\} \quad y \quad \Gamma_4 = \ \left\{t\ e^{i(\pi-\epsilon)} :\ t \in [r, R]\right\}.$$

Orientamos Γ en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(s)}{s - z}\, ds, \tag{3.4}$$

independientemente de la elección de los parámetros r, R y ϵ, elegidos, eso sí, en las condiciones ya apuntadas. Como $\forall \varphi \in [-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]$

$$\left| \frac{R e^{i\varphi}}{(\mu + R^{-\alpha} e^{-i\varphi\alpha})(R\, e^{i\varphi} - z)} - \frac{1}{\mu} \right| \leq \frac{|z|\, |\mu|\, R^\sigma e^{|\tau|\pi} - 1) + |z| + R}{(R - |z|)(|\mu|\, R^\sigma e^{-|\tau|\pi} - 1)\, |\mu|}$$

y

$$\left| \frac{r\, e^{i\varphi}}{(\mu + r^{-\alpha} e^{-i\varphi\alpha})(r\, e^{i\varphi} - z)} \right| \leq \frac{r^{\sigma+1} e^{|\tau|\pi}}{(|z| - r)(1 - |\mu|\, r^\sigma e^{|\tau|\pi})},$$

entonces, al tomar límites en (3.4) cuando $R \to \infty$ y $r \to 0$, se tiene

$$\begin{aligned} f(z) \ &= \ \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \Big(\frac{e^{i(-\pi+\epsilon)}}{(\mu + t^{-\alpha} e^{-\,i\alpha(-\pi+\epsilon)})(t\, e^{i(-\pi+\epsilon)} - z)} \\ &\quad - \frac{e^{i(\pi-\epsilon)}}{(\mu + t^{-\alpha} e^{-\,i\alpha(\pi-\epsilon)})(t\, e^{i(\pi-\epsilon)} - z)} \Big)\, dt, \end{aligned} \tag{3.5}$$

entendiendo la integral anterior como una integral de Riemann impropia. Si mediante $f(t,\epsilon)$ denotamos a la función del integrando, el hecho de poder obtener una acotación del tipo:

$$|f(t,\epsilon)| \leq \begin{cases} C\,t^{\sigma} & ,0<t<\delta \\ D\,t^{-\sigma-1} & ,\delta<t \end{cases}$$

para una adecuada elección de δ, donde C y D son independientes de τ y ϵ, permite utilizar el teorema de convergencia dominada y concluir, tras tomar límites en (3.5) cuando $\epsilon \to 0$, que

$$f(z) = \frac{1}{\mu} + \frac{\operatorname{sen}\,\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{t^{2\alpha}\mu^2 + 2\,\mu\,t^\alpha \cos\,\alpha\pi + 1}\frac{1}{z+t}dt.$$

Ahora ya es sencillo comprobar que $(\mu+z^{-\alpha})^{-1} \in \mathcal{S}_0$ y, por tanto, también es cierto que $(\mu+z^\alpha)^{-1} \in \mathcal{S}_0$.

Ejemplo 3.2 La función z^α, para $\alpha \in \mathbb{C}$ con $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, está en la clase $\mathcal{T}_0$. Téngase en cuenta que, razonando como en ejemplo anterior,

$$z^\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{-\alpha}\frac{z}{1+tz}\,dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-.$$

A partir de esta función es sencillo comprobar que, para cada $\epsilon > 0$, $(z+\epsilon)^\alpha \in \mathcal{T}$ y $(z+\epsilon)^{-\alpha}$, $(z(z+\epsilon)^{-1})^\alpha \in \mathcal{S}_0$.

Si $0 < \alpha < 1$ y $\lambda > 0$, se tiene

$$\frac{1}{\lambda+z^\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{\lambda^2 + 2\,\lambda\,t^\alpha\cos\,\alpha\pi + t^{2\alpha}}\frac{1}{z+t}\,dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-.$$

y por consiguiente está en $\mathcal{S}_0$. A partir de esta función obtendremos la representación integral de $J_\lambda^{A^\alpha}$.

Ejemplo 3.3 Para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, de nuevo por la fórmula integral de Cauchy, se verifica la relación:

$$e^{-t\,z^\alpha} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t\,s^\alpha\cos\,\alpha\pi}\operatorname{sen}(t\,s^\alpha\operatorname{sen}\alpha\pi)\,\frac{1}{z+s}\,ds, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,$$

y consecuentemente $e^{-t\,z^\alpha} \in \mathcal{S}_0$.

Ejemplo 3.4 Puesto que

$$\log(1+z) = \int_0^1 \frac{z}{1+tz}\,dt$$

es evidente la pertenencia de la citada función a la clase $\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{T}_+$.

3.2 Definición del cálculo funcional. Primeras propiedades.

Vamos a considerar como operadores base los elementos de $\mathcal{M}_0$ donde podemos definir $f(A)$ a partir del cálculo de Dunford como hace Alaarabiou en [Al1] para las funciones de $\mathcal{T}_+$.

Si $A \in \mathcal{M}_0$ y $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ entonces

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_z f(z)\, dz = a + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_z \Big(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+tz}\, d\mu(t)\Big)\, dz, \tag{3.6}$$

siendo Γ cualquier contorno que rodee a $\sigma(A)$ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (véanse [Ru], [HP] o [DS]). Consideremos la función

$$f(z,t) = \frac{z-1}{1+tz}, \quad (z,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+.$$

Si elegimos z_0, $z_1 \in \Gamma$ tales que $|z_0| = \min_{z\in\Gamma} |z| > 0$ y $|z_1| = \max_{z\in\Gamma} |z|$ entonces, por continuidad, $f(z,t)$ está acotada en $\Gamma \times [0, |z_0|^{-1} + 1]$, y como

$$|f(z,t)| \le \frac{|z_1| + 1}{|z_0|}, \quad \forall (z,t) \in \Gamma \times [|z_0|^{-1} + 1, \infty[,$$

podemos acotar la función $f(z,t)$ en $\Gamma \times \mathbb{R}_+$. Así, la función $\frac{(1+t)z}{1+tz}$ está acotada y por el teorema de Fubini se concluye a partir de (3.6) que

$$f(A) = a + \int_{\mathbb{R}_+} A_t\, d\mu(t), \tag{3.7}$$

donde la integral es convergente en $\mathcal{L}(X)$ y $A_0 = A$. Evidentemente se cumple $f(zI) = f(z)\,I$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

En realidad podríamos iniciar la construcción a partir del cálculo obtenido por Martínez y Sanz en [MS] para el caso particular de operadores acotados no negativos: si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y el operador $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$, se define $f(A)$ mediante la fórmula (3.7). Como veremos más adelante, la extensión obtenida en ambos casos coincide; no obstante, con la presentación elegida conseguimos que el cálculo funcional sea autocontenido, aunque, como contrapartida, perdemos la posibilidad de extender la construcción a espacios vectoriales localmente convexos más generales.

Teorema 3.4 *Sean $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}_0$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *$f(A) \in \mathcal{L}(X)$ con*

$$\begin{aligned} \|f(A)\| \ \le \ & |a| + \|A\| \, M(A) \, |\mu| \, ([0,1]) \\ & + (M(A)+1) \int_{]1,\infty[} \frac{2}{1+t} \, d\, |\mu| \, (t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

(ii) *Si $g(z) \in \mathcal{T}$ y $h(z) = f(z)\, g(z) \in \mathcal{T}$ entonces*

$$h(A) = f(A)\, g(A) = g(A)\, f(A).$$

(iii) *Si f no se anula y $\widetilde{f}\,(z) \in \mathcal{T}$ entonces*

$$f(A)^{-1} = \widetilde{f}\,(A^{-1}).$$

(iv) *Si $f(z) \in \mathcal{T}_+$ no se anula entonces $f(A) \in \mathcal{M}_0$ con*

$$J_\lambda^{f(A)} = 1 - \lambda f_\lambda(A), \quad \forall \lambda > 0,$$

y $M(f(A)) \le M(A)$.

(v) *Si $g(z) \in \mathcal{T}_+$ no se anula entonces*

$$f(g(A)) = (f \circ g)(A).$$

(vi) *$\sigma(f(A)) = \{f(z) : z \in \sigma(A)\}$.*

(vii) *$f(A) = \lim_{\lambda \to 0} f(A_\lambda + \lambda)$ en $\mathcal{L}(X)$.*

Demostración. El apartado (i) es inmediato y los apartados (ii), (iii) y (vi) son consecuencia del cálculo funcional holomorfo. Respecto del apartado (iv) tenemos que para cada $\lambda > 0$ la función $1 - \lambda f_\lambda(z) \in \mathcal{S}_0$, donde $f_\lambda(z) = f(z)/(1+\lambda f(z)) = (a_\lambda, \mu_\lambda)(z^{-1})$, luego por la fórmula del producto

$$\begin{aligned} J_\lambda^{f(A)} &= 1 - \lambda f_\lambda(A) = \frac{1}{1+\lambda a} - \lambda \int_{]0,\infty[} A_t \, d\mu_\lambda(t) \\ &= \frac{1}{1+\lambda f(\infty)} + \lambda \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t} J_t^A \, d\mu_\lambda(t). \end{aligned}$$

Por tanto, al tomar normas en $\mathcal{L}(X)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| J_\lambda^{f(A)} \right\| &\leq \frac{1}{1+\lambda f(\infty)} + \lambda \, M(A)(f_\lambda(\infty) - f_\lambda(0)) \\ &\leq \frac{1}{1+\lambda a} M(A) \leq M(A). \end{aligned}$$

Además, por el apartado (iii) tenemos que $0 \in \rho(f(A))$. En definitiva, $f(A) \in \mathcal{M}_0$.

Ahora, el apartado (v) es consecuencia del cálculo funcional de Dunford.

Comprobemos finalmente que (vii) es cierto. Para $t > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} (A_\lambda + \lambda)_t - (A_\lambda)_t &= \frac{1}{t}\left(J_t^{A_\lambda} - \frac{1}{1+t\lambda} J_{\frac{t}{1+t\lambda}}^{A_\lambda}\right) \\ &= J_{\frac{t}{1+t\lambda}}^{A_\lambda} \, J_t^{A_\lambda} \frac{\lambda}{1+t\lambda}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

siendo válida la igualdad obtenida incluso para $t = 0$, de donde, $\forall \lambda > 0$, se obtiene la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} \| f(A_\lambda + \lambda) - f(A) \| &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \| (A_\lambda + \lambda)_t - (A_\lambda)_t + (A_\lambda)_t - A_t \| \, d\,|\mu|\,(t) \\ &\leq (M(A)+1) \left[(M(A)+1) \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda}{1+t\lambda} \, d\,|\mu|\,(t) \right. \\ &\quad + \lambda \, \|A\| \; M(A) \, [\, \|A\| \; M(A) \; |\mu| \, ([0,1]) \\ &\quad \left. + 2 \, (M(A)+1) \int_{]1,\infty[} \frac{1}{1+t} \, d\,|\mu|\,(t) \,] \right]. \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de convergencia dominada para el primer sumando del último miembro de la anterior cadena de desigualdades se demuestra la afirmación (vii). ∎

Nota 3.2 El apartado (iv) se podría obtener a partir del apartado (iii) ya que si consideramos la función $h(z) = (1 + \lambda f(z)) \in \mathcal{T}_+$ entonces $\widetilde{h}(z) = (1+\lambda f(z^{-1}))^{-1} \in \mathcal{T}_+$ y por tanto

$$J_\lambda^{f(A)} = \widetilde{h}(A^{-1}) = \frac{1}{1+\lambda f(\infty)} + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t} J_{\frac{1}{t}}^{A} \, d\widetilde{\mu}(t),$$

donde hemos supuesto que $\widetilde{h}(z) = ((1+\lambda f(\infty))^{-1}, \widetilde{\mu})(z^{-1})$.

Del último apartado se deduce, vía la proposición 2.4, que $f(A) = \lim\inf_{\lambda\to 0} f(A_\lambda + \lambda)$, lo que sugiere la siguiente definición.

Definición 3.4 *Para $f(z) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$ definimos el operador $f(A)$ mediante:*

$$f(A) = \liminf_{\lambda\to 0} f(A_\lambda + \lambda).$$

Para demostrar el teorema espectral enunciado en el teorema siguiente, recordamos previamente algunos resultados sobre álgebras de Banach que podemos encontrar, por ejemplo, en [Ru]. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach compleja, no necesariamente conmutativa. Si $\mathcal{L}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$, se define el conmutador de $\mathcal{L}$ como el conjunto

$$\mathcal{L}^c = \{\, S \in \mathcal{A} : TS = ST, \ \forall T \in \mathcal{L}\},$$

y se verifican las siguientes afirmaciones:

a. $\mathcal{L}^c$ es un álgebra de Banach. Si $\mathcal{A}$ tiene elemento unidad, lo mismo le sucede a $\mathcal{L}^c$.

b. $\mathcal{L} \subseteq (\mathcal{L}^c)^c$. Si $\mathcal{L}$ es conmutativo entonces $(\mathcal{L}^c)^c$ también lo es.

c. $S \in \mathcal{L}^c$ es invertible entonces $S^{-1} \in \mathcal{L}^c$. Así, el espectro de cualquier elemento de $\mathcal{L}^c$ es indistinto considerarlo respecto de $\mathcal{L}^c$ o respecto de $\mathcal{A}$.

Si suponemos adicionalmente que $\mathcal{A}$ es un álgebra conmutativa con elemento unidad, se verifican las siguientes propiedades:

d. El conjunto $\mathcal{K}$ formado por las formas lineales sobre $\mathcal{A}$ multiplicativas y no idénticamente nulas es no vacío.

e. Toda forma lineal multiplicativa no idénticamente nula es continua.

f. $S \in \mathcal{A}$ es invertible si, y sólo si, $\varphi(S) \neq 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{K}$. Por tanto

$$\sigma(S) = \{\varphi(S) : \varphi \in \mathcal{K}\}.$$

Teorema 3.5 *Sean $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *$f(A) \in \mathcal{L}(X)$ con $f(A) = a + \int_{\mathbb{R}_+} A_t \, d\mu(t)$ y se tiene la acotación* (3.8).

(ii) *$f(A) = \lim_{\lambda \to 0} f(A_\lambda + \lambda)$ en $\mathcal{L}(X)$.*

(iii) *Si $g(z) \in \mathcal{T}$ y $h(z) = f(z)\, g(z) \in \mathcal{T}$ entonces*

$$h(A) = f(A)\, g(A) = g(A)\, f(A).$$

(iv) *Si $f(z) \in \mathcal{T}_+$ entonces $f(A) \in \mathcal{M}$ con*

$$J_\lambda^{f(A)} = 1 - \lambda f_\lambda(A), \quad \forall \lambda > 0,$$

y $M(f(A)) \leq M(A)$.

(v) *Si $g(z) \in \mathcal{T}_+$ entonces*

$$f(g(A)) = (f \circ g)(A).$$

(vi) *$\sigma(f(A)) = \{f(z) : z \in \sigma(A)\}$.*

(vii) *$f(A^*) = f(A)^*$.*

(viii) *$\forall g(z) \in \mathcal{T}$ se tiene*

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A).$$

Demostración. (i) Por la acotación (3.8) tenemos que $\lim \inf_{\lambda \to 0} f(A_\lambda + \lambda)$ es un operador univaluado. Sea $u \in X$; como

$$\begin{aligned} \|(A_\lambda + \lambda)_t\| \quad \leq \quad & (\|A\|\, M(A) + \lambda)\,(M(A) + 1)\, \mathcal{X}_{[0,1]} \\ & + (M(A) + 2)\, \frac{2}{1+t}\, \mathcal{X}_{]1,\infty[}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{X}$ representa la función característica del conjunto indicado, y

$$\lim_{\lambda\to 0} (A_\lambda + \lambda)_t u = A_t u, \quad \forall t \geq 0,$$

por convergencia dominada se sigue que

$$\liminf_{\lambda\to 0} f(A_\lambda + \lambda)u = au + \int_{\mathbb{R}_+} A_t u \, d\mu(t).$$

Ahora la demostración de que $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ y la acotación (3.8) es ya rutinaria.

(ii) La demostración del teorema 3.4 se puede reproducir teniendo en cuenta (i).

(iii) Por la fórmula del producto para los operadores de $\mathcal{M}_0$

$$h(A_\lambda + \lambda) = f(A_\lambda + \lambda)\ g(A_\lambda + \lambda) = g(A_\lambda + \lambda)\ f(A_\lambda + \lambda), \quad \forall\lambda > 0,$$

de donde, por el apartado previo, se deduce el resultado deseado.

(iv) Razonar como en el teorema 3.4 a partir de la fórmula del producto.

(v) Observar que por (iv) el primer término de la igualdad tiene sentido. Sabemos que

$$f(g(A_\lambda + \lambda)) = (f \circ g)(A_\lambda + \lambda), \quad \forall\lambda > 0.$$

Sea $u \in X$; es fácil convencerse de que

$$\lim_{\lambda\to 0} g(A_\lambda + \lambda)_t u = g(A)_t u, \quad \forall\lambda > 0,$$

lo que junto con la acotación

$$\|g(A_\lambda + \lambda)_t\| \leq \|g(A_\lambda + \lambda)\|\,(M(A) + 1)\mathcal{X}_{[0,1]} + (M(A) + 2)\,\frac{2}{1+t}\,\mathcal{X}_{]1,\infty[},$$

permite, por medio del teorema de convergencia dominada, concluir

$$\lim_{\lambda\to 0} f(g(A_\lambda + \lambda))u = f(g(A))u,$$

y por tanto, como

$$\lim_{\lambda\to 0} (f \circ g)(A_\lambda + \lambda)u = (f \circ g)(A)u,$$

ambos operadores coinciden.

(vi) Consideremos el subconjunto conmutativo (por la identidad resolvente)

$$\mathcal{L} = \{A_\lambda : \lambda > 0\}$$

del álgebra de Banach compleja, unitaria y no conmutativa en general, $\mathcal{L}(X)$, y su biconmutador $\mathcal{A} = (\mathcal{L}^c)^c$, que es una subálgebra conmutativa y unitaria de $\mathcal{L}(X)$. Por $\mathcal{K}$ denotaremos el conjunto de las formas lineales no idénticamente nulas y multiplicativas sobre $\mathcal{A}$. Sabemos que

$$\sigma(A_\lambda) = \{\varphi(A_\lambda) : \varphi \in \mathcal{K}\}$$

y por la proposición 2.7

$$\sigma(A_\lambda) = \{\frac{z}{1+\lambda z} : z \in \sigma(A)\} \ ,$$

con lo que tenemos perfectamente determinada $\varphi(A_\lambda)$ para $\varphi \in \mathcal{K}$.

Por la expresión de $f(A)$ y teniendo en cuenta que la integral es convergente en $\mathcal{L}(X)$ entonces $f(A) \in (\mathcal{L}^c)^c$; en consecuencia

$$\begin{aligned}\sigma(f(A)) &= \{\varphi(f(A)) : \varphi \in \mathcal{K}\} = \{a + \varphi(\int_{\mathbb{R}_+} A_t \, d\mu(t)) : \varphi \in \mathcal{K}\} \\ &= \{a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+\lambda z} \, d\mu(t) : z \in \sigma(A)\} = \{f(z) : z \in \sigma(A)\},\end{aligned}$$

siendo válida la penúltima igualdad por el hecho de que las formas lineales, al ser continuas, conmutan con la integral si $\varphi(A_t)$ es $\mu(t)$-integrable, lo que sucede para todas las $\varphi \in \mathcal{K}$.

(vii) Para todo $u^* \in X^*$ y $u \in X$ tenemos:

$$\begin{aligned}\langle f(A)^* u^*, u\rangle &= \left\langle u^*, a\,u + \int_{\mathbb{R}_+} A_t u \, d\mu(t)\right\rangle \\ &= a\,\langle u^*, u\rangle + \int_{\mathbb{R}_+} \langle (A^*)_t u^*, u\rangle \, d\mu(t) \\ &= \left\langle a u^* + \int_{\mathbb{R}_+} (A^*)_t u^* \, d\mu(t), u\right\rangle,\end{aligned}$$

siendo la última igualdad consecuencia de que $A^* \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$. Por tanto, se da la relación apuntada.

(viii) Es evidente a partir del primer apartado. ■

Nota 3.3 Para $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ se tiene también que $f(A) = \text{lím}_{\lambda \to 0} f(A + \lambda)$en $\mathcal{L}(X)$ puesto que

$$\|f(A+\lambda) - f(A)\| \leq M(A)^2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda}{1+\lambda t} \, d|\mu|(t).$$

No obstante, es obvio que no podemos utilizar la igualdad probada como definición para el caso general. El siguiente resultado si proporciona una definición válida en términos del concepto ya introducido para operadores de la clase $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$.

Proposición 3.3 *Sean* $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ *y* $A \in \mathcal{M}$. *Se tiene:*

$$\begin{aligned} f(A) = \liminf_{\lambda \to 0} \; f(A_\lambda) &= a + \int_{]1,\infty[} A_t \, d\mu(t) \\ &\quad + \liminf_{\lambda \to 0} \int_{[0,1]} A_{\lambda+t} \, d\mu(t). \end{aligned}$$

Demostración. La primera igualdad es consecuencia de la cadena de igualdades (3.9) ya que entonces

$$\int_{\mathbb{R}_+} \|(A_\lambda + \lambda)_t - (A_\lambda)_t\| \, d|\mu|(t) \leq (M(A)+1)^2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda}{1+\lambda t} \, d|\mu|(t),$$

y por convergencia dominada la última integral converge a cero cuando $\lambda \to 0$, de donde es ya inmediato comprobar que

$$f(A) = \liminf_{\lambda \to 0} \; f(A_\lambda + \lambda) = \liminf_{\lambda \to 0} \; f(A_\lambda).$$

La segunda identidad se obtiene fácilmente de la definición de límite inferior. ■

Para $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$ construimos el operador lineal $W_f(A)$ definido mediante $D(W_f(A)) = D(A)$ y

$$W_f(A)u = au + \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu(t) + \mu(0)\, Au, \quad \forall u \in D(A).$$

$$W_f(A)u = au + \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu(t) + \mu(0)\, Au, \quad \forall u \in D(A).$$

Obsérvese que si $\mu(0) \neq 0$ entonces $W_f(A)$ es multivaluado si, y sólo si, lo es A, ya que en dicho caso $W_f(A)0 = A0$. Si $\mu(0) = 0$ entonces $W_f(A)$ es univaluado independientemente de que lo sea o no A. Nótese que el operador, multivaluado si, y sólo si, lo es A,

$$a + \int_{]1,\infty[} A_t \, d\mu(t) + A \int_{[0,1]} J_t^A \, d\mu(t) =: S + AT,$$

con S y T en $\mathcal{L}(X)$, proporciona una extensión cerrada de $W_f(A)$.

Proposición 3.4 *Sean $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) *Para todo $z \in \rho(A)$ se tiene:*

$$f(A)\, R_z u = R_z \, f(A)u + f(A)0, \quad \forall u \in D(f(A)).$$

(ii) $f(A)0 \subseteq A0$. *En particular si A es uniforme entonces $f(A)$ es uniforme.*

(iii) $W_f(A) \subseteq f(A) \subseteq S + AT$.

(iv) *Si $\mu(\{0\}) \neq 0$ y además $\frac{1}{t}$ es $|\mu|\,(t)$-integrable en $]0, \infty[$, entonces $f(A) = W_f(A)$.*

Demostración. (i) Sea $(u, v) \in f(A)$. Existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ en X tal que

$$\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda = u \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda \to 0} f(A_\lambda) u_\lambda = v,$$

luego

$$\lim_{\lambda \to 0} R_z u_\lambda = R_z u \text{ y } \lim_{\lambda \to 0} R_z \, f(A_\lambda) u_\lambda = R_z v,$$

y como

$$f(A_\lambda) R_z u = R_z f(A_\lambda) u, \quad \forall u \in X,$$

por ser R_z acotado y conmutar con $A_{\lambda+t}$, se obtiene:

$$(R_z u, R_z v) \in \liminf_{\lambda \to 0} f(A_\lambda) = f(A).$$

(ii) Sea $v \in f(A)0$. Entonces existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ en X de forma que

$$\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}_+} (A_\lambda)_t \, u_\lambda \, d\mu(t) = v.$$

Por tanto

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}_+} (1+A)^{-1}(A_\lambda)_t u_\lambda \, d\mu(t) = (1+A)^{-1}v.$$

Para todo $u \in X$ se tiene que $A_{\lambda+t}u \in AJ^A_{\lambda+t}u$, lo que se traduce en:

$$(1+A)^{-1}(A_\lambda)_t = (1-(1+A)^{-1})J^A_{\lambda+t}.$$

Por ello, tenemos que

$$\begin{aligned}\left\| \int_{\mathbb{R}_+} (1+A)^{-1}(A_\lambda)_t u_\lambda \, d\mu(t) \right\| &\leq M(A)(M(A)+1) \, \|u_\lambda\| \\ &\qquad \left[\mu([0,1]) + \int_{]1,\infty[} \frac{1}{t} \, d\,|\mu|\,(t) \right],\end{aligned}$$

luego $(1+A)^{-1}v = 0$, es decir, $v \in A0$.

(iii) Sea $(u,w) \in W_f(A)$. Existe $v \in Au$ tal que

$$w = au + \int_{]0,\infty[} J^A_t v \, d\mu(t) + \mu(\{0\})v.$$

Como observamos en la nota 2.2

$$\lim_{\lambda \to 0} J_1^{A_\lambda}(u+v) = u \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda \to 0} A_{\lambda+1}(u+v) = v.$$

Para todo $t \in]0,1]$ tenemos que

$$\left\| A_{\lambda+t} \, J_1^{A_\lambda}(u+v) \right\| = \left\| \, J_t^{A_\lambda} A_{\lambda+1}(u+v) \right\| \leq (M(A)+1)^2 \, \|u+v\| \, .$$

y

$$\lim_{\lambda \to 0} A_{\lambda+t} \, J_1^{A_\lambda}(u+v) = J_t^A v,$$

ya que

$$\left\| A_{\lambda+t} \, J_1^{A_\lambda}(u+v) - J_t^A v \right\| \leq \|A_{\lambda+t}\| \left\| J_1^{A_\lambda}(u+v) - u \right\| + \left\| A_{\lambda+t} \, u - J_t^A v \right\| .$$

Así, por convergencia dominada,

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{]0,1]} A_{\lambda+t} \, J_1^{A_\lambda}(u+v) \, d\mu(t) = \int_{]0,1]} J_t^A v \, d\mu(t),$$

luego

$$\int_{]0,1]} J_t^A v\, d\mu(t) + \mu(\{0\})v \in \liminf_{\lambda\to 0} \int_{[0,1]} A_{\lambda+t}\, d\mu(t)$$

y en consecuencia $(u,w) \in f(A)$.

Para probar la otra inclusión comencemos demostrando que si $\mu(\{0\}) \neq 0$ entonces

$$f(A) \cap (D(A) \times \overline{D(A)}) = W_f(A_D),$$

mientras que si $\mu(\{0\}) = 0$ entonces

$$f(A) \cap (D(A) \times \overline{D(A)}) = W_f(A).$$

Para comprobar la primera afirmación consideremos $u \in D(A)$; por la inclusión probada si $w \in f(A)u \cap \overline{D(A)}$ entonces existe $v \in Au$ tal que

$$w = au + \int_{]0,\infty[} A_t u\, d\mu(t) + \mu(\{0\})v$$

y por tanto $v \in Au \cap \overline{D(A)}$, lo que implica que $u \in D(A_D)$ y que

$$w = au + \int_{]0,\infty[} A_t u\, d\mu(t) + \mu(\{0\})\, A_D u.$$

La inclusión restante es inmediata así como la segunda afirmación.

En definitiva, si $(u,v) \in f(A)$ entonces por (i)

$$(J_1^A u, J_1^A v) \in f(A) \cap (D(A) \times \overline{D(A)})$$

lo que conduce fácilmente a la inclusión buscada si $\mu(\{0\}) = 0$. En otro caso, por el comentario previo, $J_1^A u \in D(A_D)$ y existirá $w \in A0$ con

$$J_1^A v = a\, J_1^A u + \int_{]0,\infty[} A_t\, J_1^A u\, d\mu(t) + \mu(\{0\})(A_1 u + w),$$

luego

$$A_1 \int_{[0,1]} J_t^A u\, d\mu(t) + \mu(\{0\})w \in D(A),$$

de donde

$$\int_{[0,1]} J_t^A u\, d\mu(t) + \mu(\{0\})w \in D(A),$$

con lo que $w \in \overline{D(A)} \cap A0 = \{0\}$. Por consiguiente, $(u,v) \in AT + S$.

(iv) Sea ahora $(u,v) \in f(A)$ y asumamos las hipótesis adicionales del enunciado. Por definición existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ en X de modo que

$$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u \quad \text{y}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} f(A_\lambda)u_\lambda = \lim_{\lambda\to 0} (a\,u_\lambda + \int_{]0,\infty[} A_{\lambda+t}\,u_\lambda\,d\mu(t) + \mu(\{0\})\,A_\lambda u_\lambda) = v.$$

Por convergencia dominada se tiene

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_{]0,\infty[} A_{\lambda+t}\,u_\lambda\,d\mu(t) = \int_{]0,\infty[} A_t\,u\,d\mu(t),$$

y por tanto

$$\lim_{\lambda\to 0} \mu(\{0\})\,A_\lambda u_\lambda = v - a\,u - \int_{]0,\infty[} A_t\,u\,d\mu(t),$$

de donde, al tener que $A = \liminf_{\lambda\to 0} A_\lambda$, se deduce que $(u,v) \in W_f(A)$. ∎

Nota 3.4 Del apartado (iii) anterior se deduce en particular que

$$D(A) \subseteq D(f(A)) \subseteq \{u \in X : \int_{[0,1]} J_t^A u\,d\mu(t) \in D(A)\},$$

lo que en el caso de que $\mu(\{0\}) \neq 0$ conduce a que $D(f(A)) \subseteq \overline{D(A)}$.

De los resultados anteriores se deduce también que si $\mu(\{0\}) \neq 0$ entonces $A0 = f(A)0$, y en las condiciones del apartado (iv) tenemos además que $f(A)$ es cerrado por ser suma de un acotado con un cerrado.

Proposición 3.5 *Sean $f(z) = (a,\mu)(z) \in \mathcal{S}_0$ y $A \in \mathcal{M}$. Entonces:*

(i) *$f(A) \in \mathcal{L}(X)$ con*

$$f(A) = a + \int_{]0,\infty[} (t+A)^{-1}\,d\mu(t).$$

(ii) *$\forall g \in \mathcal{T}$ se tiene*

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A).$$

(iii) *Sea $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una red en $\mathcal{M}$ tal que*

$$A = \operatorname{lím\,inf} A_i \quad y \quad \operatorname{lím\,sup} M(A_i) < \infty. \tag{3.10}$$

Entonces

$$f(A) = \operatorname{lím\,inf} f(A_i).$$

Demostración. (i) Sabemos, a partir de la prueba de la inclusión $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{T}$ en la sección 3.1, que

$$f(A_\lambda) = a + \int_{]0,\infty[} (t + A_\lambda)^{-1} \, d\mu(t)$$

y que

$$\|f(A_\lambda)\| \leq |a| + (M(A) + 1) \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t} \, d\,|\mu|\,(t)), \tag{3.11}$$

luego $f(A)$ es un operador univaluado. Sea $u \in X$; como $\forall t > 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} (t + A_\lambda)^{-1} u = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{t} \, J_{\frac{1}{t}}^{A_\lambda} u = \frac{1}{t} \, J_{\frac{1}{t}}^{A} u$$

y

$$\left\| \frac{1}{t} \, J_{\frac{1}{t}}^{A_\lambda} \right\| \leq (M(A) + 1) \, \frac{1}{t},$$

entonces, por convergencia dominada,

$$\lim_{\lambda\to 0} f(A_\lambda) u = a\, u + \int_{]0,\infty[} (t + A)^{-1} u \, d\mu(t),$$

de donde se deduce la afirmación enunciada.

(ii) Basta tener en cuenta que $(f + g)(A_\lambda) = f(A_\lambda) + g(A_\lambda)$, y que para toda red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ con $\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u$ se tiene que $\lim_{\lambda\to 0} f(A_\lambda) u_\lambda = f(A) u$ por la acotación (3.11) uniforme respecto de λ.

(iii) Razonar de forma análoga a como se ha hecho en el primer apartado. ■

Como vamos a ver a continuación, la propiedad de "continuidad" probada en el apartado (iii) permanece válida en la clase $\mathcal{T}_+$. Precisamente, este hecho y la estabilidad son los que utiliza Alaarabiou en [Al1] para construir su cálculo funcional sobre la citada clase de funciones.

Teorema 3.6 *Sean* $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_+$ *y* $A \in \mathcal{M}$*. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) $f(A) \in \mathcal{M}$ *con* $J_\lambda^{f(A)} = 1 - \lambda f_\lambda(A)$*,* $\forall \lambda > 0$*, y* $M(f(A)) \leq M(A)$*.*

(ii) *Sea* $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ *una red en* $\mathcal{M}$ *verificando* (3.10)*. Entonces*

$$f(A) = \text{lím inf}\, f(A_i).$$

Demostración. (i) Sea $\rho > 0$. Por la proposición 3.3 tenemos $f(A) = \text{lím inf}_{\lambda \to 0} f(A_\lambda)$ luego

$$(I + \rho f(A))^{-1} = \liminf_{\lambda \to 0} J_\rho^{f(A_\lambda)}.$$

Como tenemos $\left\| J_\rho^{f(A_\lambda)} \right\| \leq M(A) + 1$ entonces el operador $(I + \rho f(A))^{-1}$ es univaluado. Además por convergencia dominada $\forall u \in X$ se tiene:

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\rho^{f(A_\lambda)} u = \frac{u}{1 + \rho a} - \rho \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu_\rho(t),$$

luego

$$J_\rho^{f(A)} = \frac{1}{1 + \rho a} - \rho \int_{]0,\infty[} A_t \, d\mu_\rho(t) \in \mathcal{L}(X),$$

de donde $f(A) \in \mathcal{M}$ con la relación ya habitual entre $M(f(A))$ y $M(A)$.

(ii) Sea $(\lambda, u) \in]0, \infty[\times X$; se tiene:

$$\begin{aligned}
\left\| J_\lambda^{f(A_i)} u - J_\lambda^{f(A)} u \right\| &\leq \lambda \int_{]0,\infty[} \|(A_i)_t u - A_t u\| \, d\mu_\lambda(t) \\
&= \lambda \int_{]0,\infty[} \left\| J_t^{A_i} u - J_t^A u \right\| \frac{1}{t} \, d\mu_\lambda(t),
\end{aligned}$$

donde el último término tiende a cero siguiendo $\mathcal{I}$ puesto que $\int_{]0,\infty[} \frac{1}{t} \, d\mu_\lambda(t) < \infty$ y $\text{lím sup}\, M(A_i) < \infty$, luego por el corolario 2.1 se obtiene la tesis anunciada. ∎

Es evidente que en general $f(A)$ puede no ser no negativo. Pensar por ejemplo que $A \in \mathcal{M}$ no implica que $-A \in \mathcal{M}$. El siguiente teorema se debe a Alaarabiou y establece lo que podríamos calificar como "continuidad" del cálculo simbólico.

Teorema 3.7 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_+$ de modo que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \quad \forall z \in [0,\infty].$$

Entonces

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(A) = f(A).$$

Demostración. Recuérdese que $f(z) \in \mathcal{T}_+$ por ser límite puntual en $]0,\infty[$ de funciones de $\mathcal{T}_+$. Sean $\mu_{n\lambda}$ y μ_λ las medidas asociadas a $f_{n\lambda}(z) = f_n(z)/(1+\lambda f_n(z))$ y $f_\lambda(z) = f(z)/(1+\lambda f(z))$ respectivamente. Observar que $f_{n\lambda}(z)$ converge puntualmente a $f_\lambda(z)$ en $[0,\infty]$. Por el corolario 2.1 para demostrar la tesis basta comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} J_\lambda^{f_n(A)} u = J_\lambda^{f(A)} u, \quad \forall u \in X, \forall \lambda > 0.$$

En primer lugar, por el teorema 3.6, tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} M(f_n(A)) \le M(A)$$

y

$$J_\lambda^{f_n(A)} u = \frac{1}{1+\lambda f_n(0)} u - \lambda \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu_{n\lambda}(t),$$
$$J_\lambda^{f(A)} u = \frac{1}{1+\lambda f(0)} u - \lambda \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu_{\lambda}(t),$$

luego sólo resta demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu_{n\lambda}(t) = \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu_\lambda(t).$$

Para ello es suficiente con comprobar que las medidas finitas $\frac{1}{t}\,\mu_{n\lambda}(t)$ convergen estrechamente a la medida finita $\frac{1}{t}\,\mu_\lambda(t)$ en $C_b(]0,\infty[;\mathbb{R})$ y aplicar el lema siguiente. Para simplificar la notación vamos a denotar las anteriores medidas mediante ν_n y ν respectivamente. Por la hipótesis tenemos que $\lim_{n\to\infty} \nu_n(]0,\infty[) = \nu(]0,\infty[)$.

Como

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \frac{1}{z+t} \, d\nu_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n\lambda}(\infty) - f_{n\lambda}(z^{-1})}{z} = \frac{f_\lambda(\infty) - f_\lambda(z^{-1})}{z} \\ &= \int_{]0,\infty[} \frac{1}{z+t} \, d\nu(t), \quad \forall z > 0, \end{aligned}$$

entonces, $\forall \varphi \in C_0([0,\infty[;\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\ d\nu_n(t) = \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\ d\nu(t), \tag{3.12}$$

puesto que por el teorema de Stone-Weierstrass el álgebra engendrada por el subespacio vectorial generado por $\{\frac{1}{z+t} : z > 0\}$ es densa en $C_0([0,\infty[;\mathbb{R})$. Ahora ya es sencillo mostrar que la convergencia expresada en (3.12) es válida en $C_0(]0,\infty[;\mathbb{R})$, ya que toda función de este espacio se puede extender a 0 dándole el valor 0 y la extensión está en $C_0([0,\infty[;\mathbb{R})$.

Sean $\psi \in C_b(]0,\infty[;\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$. Tomamos $\varphi \in C_c(]0,\infty[;[0,1])$ de forma que

$$\nu(]0,\infty[) - \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\ d\nu(t) < \epsilon..$$

Evidentemente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\nu_n(]0,\infty[) - \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\ d\nu_n(t) < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Así

$$\left| \int_{]0,\infty[} \psi(t)\ d\nu_n(t) - \int_{]0,\infty[} \psi(t)\ d\nu(t) \right| \leq 2\,\epsilon\,\|\psi\|_\infty$$
$$+ \left| \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\psi(t)\ d\nu_n(t) - \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\psi(t)\ d\nu(t) \right|,$$

de donde, por la arbitrariedad de ϵ, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \psi(t)\ d\nu_n(t) = \int_{]0,\infty[} \psi(t)\ d\nu(t).$$

■

Lema 3.2 *Sea X un espacio de Banach. Sean $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y μ medidas de Borel sobre $]0,\infty[$ no negativas y finitas, de forma que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \psi(t)\ d\mu_n(t) = \int_{]0,\infty[} \psi(t)\ d\mu(t), \quad \forall \psi \in C_b(]0,\infty[;\mathbb{R}).$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \psi(t)\ d\mu_n(t) = \int_{]0,\infty[} \psi(t)\ d\mu(t), \quad \forall \psi \in C_b(]0,\infty[;X).$$

Demostración. Comenzamos probando que $\lim_{n\to\infty} \mu_n(]0,z]) = \mu(]0,z])$ c.p.p. en $]0,\infty[$ respecto de la medida de Lebesgue. La función $\mu(]0,z])$ es monótona creciente, luego el conjunto de puntos donde es discontinua es numerable y por tanto tiene medida de Lebesgue nula. Sea $z \in]0,\infty[$ donde $\mu(]0,z])$ es continua. Sea $\epsilon > 0$. Construimos la función

$$\psi_\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq z \\ \frac{z+\epsilon-t}{\epsilon}, & z \leq t \leq z+\epsilon \\ 0, & z+\epsilon \leq t \end{cases}$$

Claramente

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(]0,z]) \leq \int_{]0,\infty[} \psi_\epsilon(t)\, d\mu(t) \leq \mu(]0,z+\epsilon]).$$

Tomando límites cuando $\epsilon \to 0$ en la anterior relación se tiene

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(]0,z]) \leq \mu(]0,z]).$$

Análogamente se prueba

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(]0,z]) \geq \mu(]0,z]),$$

y en definitiva tenemos que $\lim_{n\to\infty} \mu_n(]0,z]) = \mu(]0,z])$.

Sea $\forall\varphi \in C_c^1(]0,\infty[;X)$ y supongamos que soporte de φ está contenido en $[a,b] \subseteq]0,\infty[$. Por el teorema de Fubini se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\, d\mu(t) &= -\int_{[a,b]} [\int_t^b \varphi'(s)\, ds]\, d\mu(t) = -\int_a^b [\int_{[a,s]} d\mu(t)]\, \varphi'(s)\, ds \\ &= -\int_0^\infty \mu(]0,s])\, \varphi'(s)\, ds. \end{aligned}$$

Esta integración por partes es también válida para las μ_n por lo que tomando límites, teniendo en cuenta que al estar la sucesión $\{\mu_n(]0,z])\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente acotada podemos utilizar convergencia dominada, se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\, d\mu_n(t) = \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\, d\mu(t).$$

Como $C_c^1(]0,\infty[;X)$ es denso en $C_c(]0,\infty[;X)$ para la topología de la convergencia uniforme, se comprueba sin dificultad que la anterior convergencia se puede extender a este último espacio. Para finalizar basta con razonar como se ha hecho en el teorema anterior. ∎

Nota 3.5 Si en el teorema anterior suponemos que $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(A) = f(A)$ en $\mathcal{L}(X)$. En efecto, basta tener en cuenta que

$$f(A) = a + \int_{[0,\infty[} (1+t)\, A_t \, \frac{1}{1+t}\, d\mu(t),$$

con una relación análoga para $f_n(A)$, $(1+t)\, A_t \in C_b([0,\infty[; \mathcal{L}(X))$ y que las medidas finitas $\frac{1}{1+t}\, d\mu_n(t)$ convergen estrechamente a la medida finita $\frac{1}{1+t}\, d\mu(t)$ en $C_b([0,\infty[; \mathbb{R})$, y razonar de forma análoga a como se ha hecho en el lema anterior.

El resultado siguiente relaciona $f(A)^{-1}$ con $\tilde{f}(A^{-1})$, lo que junto con una proposición que veremos en la próxima sección que conecta $f(A+\epsilon)$ con $f(A)$, para $\epsilon > 0$, nos permitirá utilizar las propiedades del cálculo funcional para los operadores de $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ y extenderlas, en la medida de lo posible, al caso multivaluado.

Teorema 3.8 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ que no se anula y de forma que $\tilde{f}(z) \in \mathcal{T}$. Entonces*

$$f(A)^{-1} = \tilde{f}(A^{-1}).$$

Demostración. Para todo $\lambda > 0$ se tiene que $A_\lambda + \lambda \in \mathcal{M}_0$ luego por el teorema 3.4 tenemos

$$f(A_\lambda + \lambda)^{-1} = \tilde{f}((A_\lambda + \lambda)^{-1}).$$

Como $\liminf_{\lambda\to 0} f(A_\lambda + \lambda)^{-1} = f(A)^{-1}$ el resultado queda probado si comprobamos que $\liminf_{\lambda\to 0} f((A_\lambda + \lambda)^{-1}) = f(A^{-1})$, $\forall f(z) \in \mathcal{T}$. Para $t > 0$ tenemos:

$$((A_\lambda + \lambda)^{-1})_t = \frac{1}{t}\, J_{\frac{1}{t}}^{A_\lambda + \lambda} = \frac{1}{t+\lambda}\, J_{\frac{1}{t+\lambda}}^{A_\lambda} = \frac{1}{t+\lambda}(1 - \frac{1}{t+\lambda}\, A_{\lambda + \frac{1}{t+\lambda}}),$$

siendo también válida la igualdad obtenida para $t = 0$, lo que junto con la identidad resolvente nos conduce a

$$((A_\lambda + \lambda)^{-1})_t - (A^{-1})_{\lambda+t} = \frac{1}{(\lambda+t)^2}\,(A_{\frac{1}{t+\lambda}} - A_{\lambda+\frac{1}{t+\lambda}}) = \frac{\lambda}{(\lambda+t)^2}\, A_{\lambda+\frac{1}{t+\lambda}}\, A_{\frac{1}{t+\lambda}}.$$

En consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left\|((A_\lambda+\lambda)^{-1})_t - (A^{-1})_{\lambda+t}\right\| d|\mu|(t) \le \quad (M(A)+1)^2$$
$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda}{1+\lambda(t+\lambda)}\, d|\mu|(t)$$

y por convergencia dominada la última integral converge a cero cuando $\lambda \to 0$. De este hecho se concluye:

$$\liminf_{\lambda\to 0} f((A_\lambda+\lambda)^{-1}) = \liminf_{\lambda\to 0} f((A^{-1})_\lambda) = f(A-1).$$

$\blacksquare$

Nota 3.6 Podríamos probar a partir del resultado anterior que se conserva el signo es decir si $f \in \mathcal{T}_+$ entonces $f(A) \in \mathcal{M}$.

Corolario 3.1 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $f(z) \in \mathcal{T}$ que no se anula con $\widetilde{f}(z) \in \mathcal{T}$. Entonces:*

(i) Ker $f(A) \subseteq$ Ker A. *En particular si A es inyectivo entonces $f(A)$ es inyectivo.*

(ii) $R(A) \subseteq R(f(A)) \subseteq \{u \in X : \int_{[0,1]} J_t^{A^{-1}} u\, d\widetilde{\mu}(t) \in R(A)\}$.

(iii) *Si* $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\(z>0)}} \frac{z}{f(z)} \neq 0$ *entonces* $R(f(A)) \subseteq \overline{R(A)}$ *y* Ker $f(A) =$ Ker A.

Demostración. Considerar los resultados de la proposición 3.4 para A^{-1} y $\widetilde{f}$, teniendo en cuenta la igualdad del teorema anterior y que la condición $\lim_{z\to 0 (z>0)} \frac{z}{f(z)} \neq 0$ es otra forma de decir que $\widetilde{\mu}(\{0\}) \neq 0$. $\blacksquare$

3.3 Fórmula de diagonalización.

En esta sección comprobaremos que nuestra definición es una extensión de la conocida para el caso uniforme. Se establece también una expresión de $f(A)$ para $f \in \mathcal{T}_0$ que relaciona el caso multivaluado con el caso densamente definido.

Proposición 3.6 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$. Entonces $\forall \epsilon > 0$ existe un operador $F_\epsilon \in \mathcal{L}(X)$ con $\lim_{\epsilon\to 0} \|F_\epsilon\| = 0$ de modo que*

$$f(A+\epsilon) = f(A) + F_\epsilon.$$

En particular $D(f(A)) = D(f(A+\epsilon))$. Además

$$\overline{f(A)} = \liminf_{\epsilon\to 0} f(A+\epsilon).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fijo . Para $t \geq 0$ y $\lambda > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}(A+\epsilon)_{\lambda+t} - A_{\lambda+t} &= \frac{1}{\lambda+t}(J^A_{\lambda+t} - \frac{1}{1+\epsilon(\lambda+t)}\, J^A{}_{\frac{\lambda+t}{1+\epsilon(\lambda+t)}}) \\ &= \frac{\epsilon}{1+\epsilon(\lambda+t)}\, J^A_{\lambda+t}\, J^A{}_{\frac{\lambda+t}{1+\epsilon(\lambda+t)}}.\end{aligned}$$

Por ello, si definimos

$$S_{\lambda,\epsilon} = \int_{]0,1]} ((A+\epsilon)_{\lambda+t} - A_{\lambda+t})\, d\mu(t),$$

se tiene que $S_{\lambda,\epsilon} \in \mathcal{L}(X)$ con

$$\|S_{\lambda,\epsilon}\| \leq M(A)^2 \int_{]0,1]} \frac{\epsilon}{1+\epsilon t}\, d\,|\mu|\,(t).$$

Teniendo en cuenta la acotación uniforme anterior y por convergencia dominada llegamos a

$$S_\epsilon := \liminf_{\lambda\to 0} S_{\lambda,\epsilon} = \int_{]0,1]} \frac{\epsilon}{1+\epsilon t}\, J^A_t\, J^A_{\frac{t}{1+\epsilon t}}\, d\mu(t) \in \mathcal{L}(X).$$

Para concluir la primera afirmación basta con mostrar que

$$\begin{aligned}&\liminf_{\lambda\to 0}\ (\mu(\{0\})\, \frac{\epsilon}{1+\epsilon\lambda}\, J^A_\lambda\, J^A_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}} + S_{\lambda,\epsilon} + \int_{]0,1]} A_{\lambda+t}\, d\mu(t)) \\ = \ &\epsilon\,\mu(\{0\}) + S_\epsilon + \ \liminf_{\lambda\to 0} \int_{]0,1]} A_{\lambda+t}\, d\mu(t),\end{aligned}$$

lo que es sencillo en el caso de $\mu(\{0\}) = 0$. En otro caso tenemos (nota 3.4) que $D(f(A+\epsilon)), D(f(A)) \subseteq \overline{D(A)}$; como para toda red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ con

$$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u \in \overline{D(A)}$$

se tiene

$$\left\| J_\lambda^A J^A_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}} u_\lambda - u \right\| \leq M(A)^2 \|u_\lambda - u\| + M(A) \left\| J^A_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}} u - u \right\| + \left\| J_\lambda^A u - u \right\|,$$

podemos afirmar que

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda^A J^A_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}} u_\lambda = u,$$

con lo que se obtiene sin dificultad el resultado deseado.

En resumidas cuentas, $f(A+\epsilon) = f(A) + F_\epsilon$ donde

$$F_\epsilon = \int_{[0,\infty[} \frac{\epsilon}{1+\epsilon t} J_t^A J^A_{\frac{t}{1+\epsilon t}} \, d\mu(t) \in \mathcal{L}(X).$$

Como

$$\|F_\epsilon\| \leq M(A)^2 \int_{[0,\infty[} \frac{\epsilon}{1+\epsilon\lambda} \, d|\mu|(t),$$

entonces, por convergencia dominada, $\lim_{\epsilon\to 0} \|F_\epsilon\| = 0$.

Por lo que acabamos de demostrar tenemos

$$f(A) \subseteq \liminf_{\epsilon\to 0} f(A+\epsilon).$$

Sea $(u,v) \in \lim\inf_{\epsilon\to 0} f(A+\epsilon)$; entonces existe $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in f(A+\epsilon)$ de modo que $\lim_{\epsilon\to 0}(u_\epsilon, v_\epsilon) = (u,v)$. Por lo ya probado se tiene que $\forall \epsilon > 0$ existe $(u_\epsilon, w_\epsilon) \in f(A)$ de forma que

$$v_\epsilon = w_\epsilon + F_\epsilon u_\epsilon,$$

y como $\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon u_\epsilon = 0$ entonces $(u,v) \in \overline{f(A)}$. ∎

Corolario 3.2 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ de forma que $\tilde{f}(z) \in \mathcal{T}$. Entonces*

$$f(A^*) = f(A)^*.$$

Demostración. Por el teorema 3.5 se tiene

$$\tilde{f}((1+A^*)^{-1}) = \tilde{f}((1+A)^{-1})^*,$$

de donde, tras tomar inversos,

$$f(1+A^*) = f(1+A)^*.$$

Por la proposición 3.6 aplicada a ambos miembros de la última igualdad

$$f(1+A)^* = (f(A)+F_1)^* = f(A)^* + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+t}\, J_t^{A^*}\, J_{\frac{t}{1+t}}^{A^*}\, d\mu(t)$$

y

$$f(1+A^*) = f(A^*) + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+t}\, J_t^{A^*}\, J_{\frac{t}{1+t}}^{A^*}\, d\mu(t).$$

Por consiguiente, al estar el sumando común en $\mathcal{L}(X^*)$, se obtiene la igualdad deseada. ∎

Corolario 3.3 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $f(z) \in \mathcal{T}_0$. Entonces $A \in \mathcal{L}(X)$ si, y sólo si, $f(A) \in \mathcal{L}(X)$.*

Demostración. Por el teorema 3.5 si $A \in \mathcal{L}(X)$ entonces $f(A) \in \mathcal{L}(X)$. Recíprocamente, si $A \not\in \mathcal{L}(X)$ entonces $0 \in \sigma(A^{-1})$. Si $0 \in \rho(A)$ entonces por el teorema espectral para operadores acotados y el teorema 3.8

$$0 = \widetilde{f}(0) \in \{\widetilde{f}(z) : z \in \sigma(A^{-1})\} = \sigma(\widetilde{f}(A^{-1})) = \sigma(f(A)^{-1}),$$

con lo que $f(A) \notin \mathcal{L}(X)$. Si $0 \in \sigma(A)$ consideramos el operador $1+A$ que está el las condiciones anteriores por lo que se verifica $f(1+A) \notin \mathcal{L}(X)$. Por la proposición 3.6 se concluye que $f(A) \notin \mathcal{L}(X)$. ∎

En el siguiente corolario se establece que nuestra construcción coincide, al menos, con la de Martínez-Sanz [MS] en el caso más interesante, esto es, cuando $f(z)$ y $\widetilde{f}(z)$ están en la clase $\mathcal{T}$. (Obsérvese que también coinciden por ejemplo sobre la clase $\mathcal{S}_0$).

Lema 3.3 *Si $f(z) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$ entonces*

$$(1+A)\, f(A)\, J_1^A = (1+\lambda A)\, f(A)\, J_\lambda^A, \quad \forall \lambda > 0.$$

Demostración. Sea $\lambda > 0$. La relación

$$f(A)\, J_\lambda^A u = \frac{1}{\lambda}\left(f(A)\, J_1^A u + (\lambda - 1)\, f(A)\, J_1^A\, J_\lambda^A u\right), \quad \forall u \in X,$$

implica sin dificultad que el dominio de ambos operadores es el mismo. Sea $u \in X$ de forma que $f(A)\; J_1^A u \cap D(A) \neq \varnothing$. Entonces

$$(J_1^A + \lambda A_1)\, f(A)\, J_\lambda^A u = f(A)\, J_1^A u,$$

de donde

$$(1+\lambda A)\, f(A)\, J_\lambda^A u = (1+A)\,(J_1^A + \lambda A_1)\, f(A)\, J_\lambda^A u = (1+A)\, f(A)\, J_1^A u.$$

■

Corolario 3.4 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ que no se anula con $\tilde{f}(z) = (\tilde{a},\tilde{\mu})(z^{-1}) \in \mathcal{T}$. Se cumplen:*

(i) *$f(A)$ es cerrado. En particular*

$$f(A) = \liminf_{\epsilon \to 0} f(A+\epsilon).$$

(ii) *Si A es univaluado entonces*

$$f(A) = (1+A)\, f(A)(1+A)^{-1} = S + AT.$$

Si además A es densamente definido entonces

$$f(A) = \overline{W_f(A)}.$$

Demostración. (i) Por el teorema 3.8 $f(1+A)$ tiene inverso en $\mathcal{L}(X)$ luego es cerrado. Por la proposición 3.6 $f(A)$ es cerrado al ser suma de un operador cerrado con un operador acotado.

(ii) En primer lugar como, $\forall u \in X$, se tiene

$$W_f(A)\,(1+A)^{-1}u = (1+A)^{-1}[Su - \int_{[0,1]} J_t^A u\, d\mu(t)] + \int_{[0,1]} J_t^A u\, d\mu(t),$$

se obtiene fácilmente la igualdad

$$(I+A)\, f(A)\,(I+A)^{-1} = S + AT.$$

Por la proposición 3.4 tenemos

$$W_f(A) \subseteq f(A) \subseteq AT + S,$$

donde todos los operadores relacionados son univaluados. Sólo resta probar que si $u \in X$ con $f(A)(1+A)^{-1}u \cap D(A) \neq \varnothing$ entonces $u \in D(f(A))$.

Cuando A tiene inverso acotado si $v = W_f(A)(1+A)^{-1}u \in D(A)$ y $w = (1+A)v$ tenemos:

$$(1+A)^{-1}u = (A^{-1})(1+A)^{-1}w = \tilde{a}\,(1+A)^{-1}w + \int_{[0,\infty[} (A^{-1})_t(1+A)^{-1}w\, d\tilde{\mu}(t).$$

Como la resolvente conmuta con $\tilde{f}(A^{-1})$, por que lo hace con $(A^{-1})_t$ con $t \geq 0$, entonces

$$(1+A)^{-1}(\tilde{f}(A^{-1})w - u) = 0,$$

deduciéndose de ello que $u = \tilde{f}(A^{-1})w$, es decir, $w = f(A)u$.

Para un $A \in \mathcal{M}$ arbitrario consideramos el operador $A+\epsilon$ para un $\epsilon > 0$ que tiene inverso acotado y que por lo tanto verifica la igualdad

$$f(A+\epsilon) = (1+\epsilon+A)\; f(A+\epsilon)\,(1+\epsilon+A)^{-1}.$$

Luego si $f(A)(1+A)^{-1}u \in D(A)$ tenemos, aplicando el lema anterior, que $f(A)(1+\epsilon+A)^{-1}u \in D(A)$. Por la proposición 3.6

$$\begin{aligned} f(A+\epsilon)\,(1+\epsilon+A)^{-1}u &= f(A)\,(1+\epsilon+A)^{-1}u + F_\epsilon(1+\epsilon+A)^{-1}u \\ &= f(A)\,(1+\epsilon+A)^{-1}u + (1+\epsilon+A)^{-1}F_\epsilon u, \end{aligned}$$

de donde, al estar el elemento de la derecha de la última igualdad en $D(A)$, obtenemos que $u \in D(f(A+\epsilon)) = D(f(A))$.

Para la segunda afirmación como $f(A)$ es cerrado obtenemos el resultado si comprobamos que

$$AT + S \subseteq \overline{W_f(A)}.$$

Sea $u \in X$ tal que $Tu \in D(A)$. Teniendo presente que A es densamente definido se puede afirmar:

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda^A u = u \text{ y } \lim_{\lambda\to 0} W_f(A)\, J_\lambda^A u = \lim_{\lambda\to 0} J_\lambda^A(AT+S)u = (AT+S)u,$$

y por tanto $\overline{W_f(A)}$ es una extensión de $AT+S$. ∎

Proposición 3.7 *Sean $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ con $\tilde{f}(z) = (\tilde{a},\tilde{\mu})(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si* $\mu(\{0\}) = 0$ *y* $\tilde{a} = 0$ *entonces*

$$D(A) \subseteq D(f(A)) \subseteq \overline{D(A)},$$

y el operador $W_f(A)$ *es cerrable con*

$$\overline{W_f(A)} = f(A)_D = f(A_D).$$

(ii) *Si* $\mu(\{0\}) \not= 0$ *entonces*

$$\overline{W_f(A_D)} = f(A)_D = f(A_D).$$

(iii) *En los dos casos anteriores se tiene*

$$\lim_{\lambda \to 0} f(A + \epsilon)_D = f(A)_D.$$

Demostración. (i) Sabemos que $D(A) \subseteq D(f(A)$ con $W_f(A)u \in f(A)u$, $\forall u \in D(A)$. Para probar que $D(f(A) \subseteq \overline{D(A)}$ basta observar que

$$D(f(A)) = R(f(A)^{-1}) = R(\tilde{f}(A^{-1})),$$

y comprobar que si $g \in \mathcal{T}$ con $g(0) = 0$ y $B \in \mathcal{M}$, entonces $R(g(B)) \subseteq \overline{R(B)}$. Ahora bien, por definición de $g(B)$ es inmediato que

$$R(g(B)) \subseteq \overline{\bigcup_{\lambda > 0} R(g(B_\lambda))} \subseteq \overline{R(B)}.$$

Por otra parte,

$$W_f(A)u = au + \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu(t) \in \overline{D(A)}, \quad \forall u \in D(A),$$

luego $W_f(A) \cap \overline{D(A)} \times \overline{D(A)} = W_f(A)$. Es ya evidente que $f(A)_D$ es un operador cerrado y uniforme puesto que $f(A)0 \cap \overline{D(A)} \subseteq A0 \cap \overline{D(A)} = \{0\}$. Por tanto, $W_f(A)$ es cerrable y $\overline{W_f(A)} \subseteq f(A)_D$. Sea $(u, v) \in f(A)_D$; como

$$(J_\lambda^A u, J_\lambda^A v) \in f(A) \cap D(A) \times \overline{D(A)} = W_f(A)$$

y $\lim_{\lambda \to 0} (J_\lambda^A u, J_\lambda^A v) = (u, v)$ entonces $(u, v) \in \overline{W_f(A)}$. En definitiva $\overline{W_f(A)} = f(A)_D$.

Es ya evidente que $f(A_D) = \overline{W_f(A_D)} \subseteq \overline{W_f(A)}$. Sea $v = \overline{W_f(A)}u$; como

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda^A u = u \text{ y } \lim_{\lambda \to 0} W_f(A_D)\, J_\lambda^A u = \lim_{\lambda \to 0} \overline{W_f(A)}\, J_\lambda^A u = v,$$

entonces $v = \overline{W_f(A_D)}u$ obteniéndose así la otra inclusión.

(ii) Sabemos que $f(A)_D$ es un operador uniforme y cerrado que extiende a $W_f(A_D)$ luego $f(A_D) \subseteq f(A)_D$. La inclusión restante se prueba como en el caso anterior.

(iii) Para probar la convergencia puntual indicada notar que por la proposición 3.6 se tiene

$$f(A+\epsilon)_D = f((A+\epsilon)_D) = f(A_D+\epsilon) = f(A_D) + F_\epsilon = f(A)_D + F_\epsilon.$$

■

Corolario 3.5 *Sean $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ con $\widetilde{f}(z) = (\widetilde{a},\widetilde{\mu})(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $\widetilde{\mu}(\{0\}) = 0$ y $a = 0$ entonces*

$$R(A) \subseteq R(f(A)) \subseteq \overline{R(A)},$$

y el operador $W_{\widetilde{f}}(A^{-1})$ es cerrable con

$$\overline{W_{\widetilde{f}}(A^{-1})} = (f(A)_R)^{-1} = f(A_R)^{-1}.$$

(ii) *Si $\widetilde{\mu}(\{0\}) \neq 0$ entonces*

$$\overline{W_{\widetilde{f}}(A_R^{-1})} = (f(A)_R)^{-1} = f(A_R)^{-1}.$$

(iii) *En los dos casos anteriores se tiene*

$$\lim_{\lambda \to 0} f(A+\epsilon)_R = f(A)_R.$$

Demostración. Aplicar la proposición anterior a A^{-1} y $\widetilde{f}$ para obtener (i) y (ii) . Para probar (iii) úsense las relaciones siguientes:

$$f(A+\epsilon)_R = f((A+\epsilon)_R) = f(A_R+\epsilon) = f(A_R) + F_\epsilon = f(A)_R + F_\epsilon.$$

■

Corolario 3.6 *Sean* $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_0$ *y* $A \in \mathcal{M}$. *Entonces* $f(A_D) \subsetneq f(A)$ *si, y solamente si,* $\overline{D(A)} \subsetneq X$.

Demostración. Por la proposición previa $f(A_D) = f(A)_D$. Supongamos que $\overline{D(A)} \subsetneq X$. El corolario 3.1 nos asegura que $R(A) \subseteq R(f(A))$, y la proposición 2.5 que existe $v \in R(A)$ con $v \notin \overline{D(A)}$. Entonces tenemos que existe $(u, v) \in f(A)$ que no está en $f(A_D)$. La otra implicación es obvia. ■

Teorema 3.9 *Sea* $A \in \mathcal{M}$. *Si* $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_0$ *entonces*

$$A0 = f(A)0,$$

y

$$f(A) = (1 + A)\, f(A)\, (1 + A)^{-1} \mid_{\overline{D(A)}} = S + AT \mid_{\overline{D(A)}}. \tag{3.13}$$

Demostración. La inclusión $f(A)0 \subseteq A0$ es siempre válida. Sea $(0, v) \in A$. Como $f(A)^{-1} = \tilde{f}(A^{-1})$ entonces basta probar que $(v, 0) \in \tilde{f}(A^{-1})$. Sea $\tilde{f}(z) = (0, \tilde{\mu})(z^{-1})$. Tenemos

$$(A^{-1})_{\lambda+t}\, A_{\lambda+1} = (1 - J^{A}_{\frac{1}{\lambda+t}})\, J^{A}_{\lambda}\, J^{A_\lambda}_{1},$$

luego

$$\left\| \int_{[0,1]} (A^{-1})_{\lambda+t}\, A_{\lambda+1} v \; d\tilde{\mu}(t) \right\| \leq M(A)\, (M(A) + 1) \left\| J^{A_\lambda}_{1} v \right\| |\tilde{\mu}| \,([0, 1])$$

y por tanto,

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{[0,1]} (A^{-1})_{\lambda+t}\, A_{\lambda+1} v \; d\tilde{\mu}(t) = 0.$$

Este hecho permite afirmar que

$$(v, 0) \in \liminf_{\lambda \to 0} \int_{[0,1]} (A^{-1})_{\lambda+t} \; d\tilde{\mu}(t),$$

y puesto que

$$\int_{]1,\infty[} (A^{-1})_t v \, d\tilde{\mu}(t) = \int_{]1,\infty[} \frac{1}{t}\, J^{A}_{\frac{1}{t}} v \, d\tilde{\mu}(t) = 0,$$

entonces $(v,0) \in \tilde{f}(A^{-1})$. Queda así probada la inclusión $A0 \subseteq f(A)0$.

Probemos ahora la primera igualdad de (3.13). Sea $(u,v) \in f(A)$; sabemos que $(1+A)^{-1}v \in f(A)(1+A)^{-1}u$ con lo que $v \in (1+A)\, f(A)\, (1+A)^{-1}u$. Como $f(A)0 = (1+A)\, f(A)\, (1+A)^{-1}0$ entonces para deducir la igualdad buscada es suficiente con probar la inclusión de dominios que aún desconocemos, es decir, si $u \in \overline{D(A)}$ es tal que $f(A)(1+A)^{-1}u \cap D(A) \neq \varnothing$ entonces $u \in D(f(A))$.

Comencemos probando el resultado buscado en el caso de que $0 \in \rho(A)$. Sean $u \in \overline{D(A)}$ tal que $v = f(A)_D(1+A)^{-1}u \in D(A)$ y $w \in (1+A)v$. Basta comprobar que

$$u = \tilde{f}(A^{-1})w = \int_{\mathbb{R}_+} (A^{-1})_t w \, d\tilde{\mu}(t).$$

Ahora bien, como tenemos

$$\tilde{f}(A^{-1})(1+A)^{-1}w = (1+A)^{-1}u$$

y la resolvente conmuta con $\tilde{f}(A^{-1})$, por que lo hace con $(A^{-1})_t$ para $t \geq 0$, entonces

$$(1+A)^{-1}(\tilde{f}(A^{-1})w - u) = 0.$$

Por lo tanto, al tener que $\tilde{f}(A^{-1})w \in \overline{D(A)}$, se obtiene que $u = \tilde{f}(A^{-1})w$.

Para un $A \in \mathcal{M}$ cualquiera razonaríamos exactamente como en el apartado (ii) del corolario 3.4.

Finalmente como, $\forall u \in \overline{D(A)},$ se tiene

$$f(A)_D(1+A)^{-1}u = (1+A)^{-1}[Su - \int_{[0,1]} J_t^A u \, d\mu(t)] + \int_{[0,1]} J_t^A u \, d\mu(t),$$

podemos confirmar la validez de la segunda igualdad de (3.13). ■

Nota 3.7 Razonando como acabamos de hacer se tiene también que

$$f(A) = a + \int_{]b,\infty[} A_t \, d\mu(t) + A \int_{[0,b]} J_t^A \, d\mu(t) \mid_{\overline{D(A)}}, \quad \forall b > 0.$$

Obsérvese que en las condiciones del teorema anterior no se puede esperar, como sucede en el caso univaluado, que $f(A) = (1+A)\, f(A)\, (1+A)^{-1}$(corolario 3.4), puesto que ésta relación implica que A es univaluado.

En efecto, por la anterior igualdad si $u \in X$ es tal que $f(A)(1+A)^{-1}u \cap \overline{D(A)} \neq \varnothing$ se tiene que $u \in D(f(A))$ y por tanto está en $\overline{D(A)}$, luego si $v \in A0$ tenemos que

$$0 \in f(A)(1+A)^{-1}v \cap D(A),$$

lo que implica que $v \in \overline{D(A)}$, y por consiguiente $v = 0$. No obstante, cuando $\mu(\{0\}) \neq 0$ si que es cierta la igualdad $f(A) = S + AT$.

En el resultado anterior si $\tilde{f}(0) \neq 0$ la conclusión que extraemos es que $f(A)0 \subseteq D(f(A))$. Si adicionalmente $f \in \mathcal{T}_+$ ($\Rightarrow f \in \mathcal{S}_0$) conduce a que $f(A)$ es univaluado. Por tanto, no es cierta en general la fórmula de diagonalización.

Corolario 3.7 *Sean $f(z) = (0,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ con $\tilde{f}(z) = (\tilde{a},\tilde{\mu})(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$. Entonces*

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} f(A).$$

3.4 Fórmulas del producto. Consecuencias.

Teorema 3.10 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f, g \in \mathcal{T}_0$ con $h = f\,g \in \mathcal{T}_0$ entonces*

$$h(A) = f(A)\,g(A) = g(A)\,f(A). \tag{3.14}$$

Demostración. Como el operador $A + \epsilon$, con $\epsilon > 0$, tiene inverso acotado por la fórmula del producto para operadores acotados (teorema 3.5)

$$\tilde{g}((A+\epsilon)^{-1})\,\tilde{f}((A+\epsilon)^{-1}) = \tilde{h}((A+\epsilon)^{-1}),$$

de donde teniendo en cuenta el teorema 3.8 y tras tomar inversos

$$f(A+\epsilon)\,g(A+\epsilon) = h(A+\epsilon), \quad \forall \epsilon > 0.$$

Sea $(u,v) \in h(A)$. Por la proposición 3.6 para cada $\epsilon > 0$ existe un operador acotado H_ϵ de forma que

$$v + H_\epsilon u \in h(A+\epsilon)u = f(A+\epsilon)\,g(A+\epsilon)u = f(A+\epsilon)\,g(A+\epsilon)_D u,$$

y con $\text{lím}_{\lambda\to 0} \|H_\epsilon\| = 0$. Por la proposición 3.7 tenemos

$$\lim_{\lambda\to 0} g(A+\epsilon)_D u = g(A)_D u \ ,$$

luego

$$(g(A)_D u, v) \in \liminf_{\lambda\to 0} f(A+\epsilon) = f(A),$$

es decir, $(u,v) \in f(A)\, g(A)$. Notar que tenemos

$$h(A)0 = A0 = f(A)\, g(A)0,$$

luego para concluir la igualdad buscada bastar con probar la inclusión de dominios que queda pendiente. Si $(u,v) \in f(A)\, g(A)$, es decir $(g(A)_D u, v) \in f(A)$, entonces por la proposición 3.4 y la inclusión que acabamos de probar

$$\begin{aligned}(1+A)^{-1}v &\in f(A)\,(1+A)^{-1}g(A)_D u = f(A)\, g(A)_D(1+A)^{-1}u \\ &= h(A)(1+A)^{-1}u,\end{aligned}$$

esto es,

$$h(A)(1+A)^{-1}u \cap D(A) \neq \varnothing,$$

luego, por el teorema 3.9, $u \in D(h(A))$. ■

Revisando la anterior demostración se observa que ésta es válida para operadores univaluados exigiendo únicamente que las tres funciones y sus respectivas reversas estén en $\mathcal{T}$. Como veremos en los siguientes resultados el caso anterior no es el único en el que se verifica la fórmula del producto.

Teorema 3.11 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $f \in \mathcal{T}$ y $g \in \mathcal{S}_0$ de forma que $h = f\,g \in \mathcal{T}$, entonces*

$$g(A)\, f(A) \subseteq h(A) \subseteq f(A)\, g(A).$$

Si además $f \in \mathcal{S}_0$ se verifica (3.14).

(ii) *Si $f \in \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{S}_0$ no se anula y $g \in \mathcal{T}_0$ de forma que $h = f\,g \in \mathcal{T}_0$, entonces se tiene* (3.14).

(iii) *Si $f, g \in \mathcal{T}_+$ no se anulan y $h = f\,g \ \in \mathcal{T}_+$ entonces se verifica la fórmula del producto* (3.14).

Demostración. (i) En primer lugar por la fórmula del producto para operadores acotados

$$h(A_\lambda) = f(A_\lambda)\, g(A_\lambda) = g(A_\lambda)\, f(A_\lambda), \quad \forall \lambda > 0.$$

Sea $(u, v) \in h(A)$. Existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ en X tal que

$$\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda = u \text{ y } \lim_{\lambda \to 0} h(A_\lambda)\, u_\lambda = \lim_{\lambda \to 0} f(A_\lambda)\, g(A_\lambda)\, u_\lambda = v.$$

Como $\lim_{\lambda \to 0} g(A_\lambda)u = u$ y la red de operadores acotados $\{g(A_\lambda)\}_{\lambda>0}$ está uniformemente acotada se tiene que

$$\lim_{\lambda \to 0} g(A_\lambda)\, u_\lambda = g(A)u,$$

luego por definición $(g(A)u, v) \in f(A)$ y consecuentemente $(u, v) \in f(A)\, g(A)$.

Consideremos ahora $(u, v) \in g(A)\, f(A)$. Existe $w \in f(A)u$ con $v = g(A)w$. Por definición de $f(A)$ existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ en X tal que

$$\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda = u \text{ y } \lim_{\lambda \to 0} f(A_\lambda)\ u_\lambda = w.$$

Razonando como anteriormente se obtiene

$$\lim_{\lambda \to 0} h(A_\lambda)\, u_\lambda = \lim_{\lambda \to 0}\ g(A_\lambda)\ f(A_\lambda)\, u_\lambda = v,$$

lo que implica que $(u, v) \in h(A)$.

Finalmente, si de forma adicional $f \in \mathcal{S}_0$ es ya evidente que se da la fórmula del producto.

(ii) Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_+$ entonces con la notación de la sección 3.1 se tiene que $f(z) = (b, \nu)(z) \in \mathcal{S}_0$ con $b > 0$. Por el apartado previo

$$f(A)\, g(A) \subseteq h(A) \subseteq g(A)\, f(A)$$

donde

$$f(A) = b + \int_{]0,\infty[} (t + A)^{-1}\, d\nu(t) \in \mathcal{L}(X).$$

Como $f(A)\,g(A)0 = A0 = g(A)\,f(A)0$ entonces para probar la fórmula del producto basta con mostrar que si $u \in X$ es tal que $f(A)u \in D(g(A))$ se tiene necesariamente que $u \in D(g(A))$. Por la proposición 3.6

$$f(1+A) = f(A) + F_1 = f(A) + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{1+t}\, J_t^A\, J^A_{\frac{t}{1+t}}\, d\mu(t).$$

Por ser A cerrado y

$$\int_{]0,\infty[} \frac{1}{1+t} \left\| A_{\frac{t}{1+t}} \right\| d\,|\mu|\,(t) \leq (M(A)+1) \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\,|\mu|\,(t),$$

entonces $F_1 u \in D(A) \subseteq D(g(A))$, de donde

$$f(1+A)u \in D(g(A)) = D(g(1+A)).$$

Razonando como en otras ocasiones a partir de la fórmula del producto para operadores acotados se tiene:

$$f(1+A)\,g(1+A) = g(1+A)\,f(1+A).$$

Por tanto $u \in D(g(1+A)) = D(g(A))$.

(iii) Este caso se reduce a alguno de los casos ya estudiados. En efecto, aplicamos el teorema 3.10 si $f, g \in \mathcal{T}_0$, si $f \in \mathcal{S}_0$ y $g \in \mathcal{T}_0$ entonces es la primera parte de este apartado la que debemos considerar, mientras que en el caso restante utilizamos el apartado (i) del presente teorema. ■

Nota 3.8 En el apartado (i) del teorema anterior no podemos esperar que se produzca en general la igualdad, pues si tomamos $f(z) = (1+z) \in \mathcal{T}_0$, $g(z) = \frac{1}{1+z} \in \mathcal{S}_0$ (notar que no tiene reversa), $h(z) = 1 \in \mathcal{T}_+$ y si A es propiamente multivaluado, las dos inclusiones del enunciado son estrictas. Este mismo ejemplo pone de manifiesto que la condición $f(z) \in \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{S}_0$ en el apartado (ii) no se puede sustituir por $f(z) \in \mathcal{S}_0$.

Obsérvese nuevamente que si $f(z) \in \mathcal{T}_+$ entonces $f(A) \in \mathcal{M}$. Para $\lambda > 0$ sabemos que $1 - \lambda f_\lambda(z) \in \mathcal{S}_0$, $1 + \lambda f(z) \in \mathcal{T}_+$ y su producto está en $\mathcal{T}_+$, luego $1 \subseteq (1+\lambda f(A))(1-\lambda f_\lambda(A))$ e $(1-\lambda f_\lambda(A))\,(1+\lambda f(A)) \subseteq 1$, de donde $(1+\lambda f(A))^{-1} = (1-\lambda f_\lambda(A)) \in \mathcal{L}(X)$ y $M(f(A)) \leq M(A)$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$, con $0 < \alpha < 1/2$, la familia $\{S(t)\}_{t>0}$ de operadores de $\mathcal{L}(X)$, obtenidos a partir de las funciones del ejemplo 3.3,

$$S(t) = e^{-tz^\alpha}(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\, s^\alpha \cos \alpha\pi}\, sen(t\, s^\alpha\, sen\alpha\pi)\,(s+A)^{-1}\, ds, \quad t > 0,$$

y $S(0) = 1$, verifica la propiedad de semigrupo, es decir,

$$S(t_1)\,S(t_2) = S(t_2)\,S(t_1) = S(t_1 + t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

La siguiente propiedad permite, si ese es el proceso que se desea seguir, extender por aditividad el concepto de potencia fraccionaria a los $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha \geq 1$.

Corolario 3.8 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_0$ con $\mu(\{0\}) = 0$ ($f(z) \in \mathcal{T}_+$) entonces*

$$A = f(A)\,\overline{f}(A) = \overline{f}(A)\,f(A).$$

Demostración. En las condiciones pedidas a f se tiene que $\overline{f} \in \mathcal{T}_0$ luego basta con aplicar el teorema 3.10. Si $f(z) \in \mathcal{T}_+$ entonces $\overline{f} \in \mathcal{T}_+$ luego las identidades buscadas se obtienen por el apartado (ii) del teorema 3.11. ■

Corolario 3.9 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f(z), g(z) \in \mathcal{T}_+$ de forma que existe $h(z) \in \mathcal{T}_+$ con $g(z) = h(z)\,f(z)$ entonces*

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A).$$

Por tanto, el operador $f(A) + g(A)$ es no negativo.

Demostración. Como hemos visto en el teorema 3.11 se da la fórmula del producto en $\mathcal{T}_+$, luego:

$$h(A)\,f(A) = g(A) = f(A)\,h(A)$$

y

$$(f + g)(A) = (1 + h(A))\,f(A) = f(A)\,(1 + h(A)),$$

con lo que se comprueba de forma trivial la propiedad enunciada. ■

Corolario 3.10 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_+$ con $\mu(\{0\}) > 0$ entonces*

$$f(A) = W_f(A).$$

Demostración. Por la proposición 3.4 sólo resta probar que $D(f(A)) \subseteq D(A)$. Definimos $g(z) = f(z) - \mu(\{0\})\, z \in \mathcal{T}_+$. Como

$$f(z) = g(z)\,(1 + \mu(\{0\})\,\overline{g}(z)),$$

y $(1 + \mu(\{0\})\,\overline{g}(z)) \in \mathcal{T}_+$, entonces por la fórmula del producto y el corolario 3.8

$$f(A) = (1 + \mu(\{0\})\overline{g}(A))\,g(A) = g(A) + \mu(\{0\})\,A,$$

de donde, como $D(A) \subseteq D(g(A))$, se obtiene la inclusión de dominios deseada. ∎

3.5 Ley de la composición y teorema de la aplicación espectral.

Esta sección la empleamos en primer lugar para incluir la composición de funciones entre las operaciones del cálculo simbólico, y en segundo término para establecer relaciones entre el espectro de A y de $f(A)$ para $A \notin \mathcal{L}(X)$ (caso que excluimos puesto que el teorema de la aplicaión espectral para los operadores de $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ ya ha sido probado en el teorema 3.5).

Teorema 3.12 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{S}_0$ ($\supset \mathcal{T}_+$) y $g(z) = (b,\nu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_+$ entonces*

$$f(g(A)) = (f \circ g)(A).$$

Demostración. Destaquemos para empezar que el operador $f(g(A))$ está bien definido pues $g(A) \in \mathcal{M}$, y lo propio se puede decir de $(f \circ g)(A)$ ya que en el teorema 3.3 se demostró que $f \circ g \in \mathcal{T}$ (incluso en la clase $\mathcal{T}_+$ si $f \in \mathcal{T}_+$). Supongamos en primer lugar que $f \in \mathcal{T}_0$. Si g toma el valor cero el resultado es trivial y por tanto podemos asumir que ésto no sucede. Con nuestra hipótesis $\widetilde{(f \circ g)}(z) = \widetilde{f}(\widetilde{g}(z)) \in \mathcal{T}$, luego por la ley de la composición para operadores de $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$

$$\widetilde{f}(\widetilde{g}((A+\epsilon)^{-1})) = \widetilde{(f \circ g)}((A+\epsilon)^{-1}), \quad \forall \epsilon > 0,$$

y al tomar inversos

$$f(g(A+\epsilon)) = (f \circ g)(A+\epsilon), \quad \forall \epsilon > 0.$$

Por el corolario 3.7 tenemos que

$$\liminf_{\epsilon \to 0} (f \circ g)(A+\epsilon) = (f \circ g)(A),$$

luego para concluir la demostración es suficiente con probar que

$$\liminf_{\epsilon \to 0} f(g(A+\epsilon)) = f(g(A)).$$

Por el teorema 3.9, recordando que siempre $D(g(A+\epsilon)) = D(g(A))$, $\forall \epsilon > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} f(g(A+\epsilon)) &= a + \int_{]1,\infty[} g(A+\epsilon)_t \, d\mu(t) \\ &\quad + g(A+\epsilon) \int_{[0,1]} J_t^{g(A+\epsilon)} \, d\mu(t)|_{\overline{D(g(A))}} \end{aligned}$$

y

$$f(g(A)) = a + \int_{]1,\infty[} g(A)_t \, d\mu(t) + g(A) \int_{[0,1]} J_t^{g(A)} \, d\mu(t)|_{\overline{D(g(A))}}.$$

La proposición 3.6 afirma que, $\forall \epsilon > 0$, existe un operador $G_\epsilon \in \mathcal{L}(X)$, con $\lim_{\epsilon \to 0} G_\epsilon = 0$, de modo que $g(A+\epsilon) = g(A) + G_\epsilon$; por consiguiente, teniendo en cuenta que las resolventes de A y de $g(A)$ conmutan, se obtiene la relación:

$$\int_{[0,1]} (J_t^{g(A)} - J_t^{g(A+\epsilon)}) \, d\mu(t) = G_\epsilon \int_{[0,1]} t \, J_t^{g(A+\epsilon)} \, J_t^{g(A)} \, d\mu(t).$$

Como el rango de este último operador de $\mathcal{L}(X)$ está contenido en $D(g(A))$ con

$$G_\epsilon \int_{[0,1]} J_t^{g(A+\epsilon)} (1 - J_t^{g(A)}) \, d\mu(t) \subseteq g(A) \int_{[0,1]} (J_t^{g(A+\epsilon)} - J_t^{g(A)}) \, d\mu(t),$$

entonces

$$\begin{aligned} f(g(A+\epsilon)) &= f(g(A)) + \int_{]1,\infty[} (g(A+\epsilon)_t - g(A)_t) \, d\mu(t) \\ &\quad + G_\epsilon \int_{[0,1]} t J_t^{g(A+\epsilon)} \, J_t^{g(A)} \, d\mu(t). \end{aligned}$$

Los dos últimos sumandos representan un operador acotado que llamamos F_ϵ y se verifica

$$\|F_\epsilon\| \leq M(A)^2 \left[\|G_\epsilon\| \, |\mu| \left([0,1]\right) + \int_{]1,\infty[} \left(\int_{]0,\infty[} \frac{\epsilon}{1+\epsilon s} \, d\nu_t(s)\right) d\,|\mu|\,(t)\right].$$

El segundo sumando de la última expresión converge a cero cuando $\epsilon \longrightarrow 0$ por convergencia dominada ya que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{]0,\infty[} \frac{\epsilon}{1+\epsilon s} \, d\nu_t(s) = 0, \quad \forall t > 1,$$

y

$$\int_{]0,\infty[} \frac{\epsilon}{1+\epsilon s} \, d\nu_t(s) \leq g_t(1) - g_t(0), \quad \forall \epsilon \leq 1,$$

donde $g_t(1) - g_t(0)$ es $|\mu|\,(t)$ - integrable en $]1,\infty[$. Por lo que acabamos de razonar

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|F_\epsilon\| = 0,$$

hecho que nos conduce sin dificultad a

$$f(g(A)) \subseteq \liminf_{\epsilon \to 0} f(g(A+\epsilon)).$$

Sea $(u,v) \in \liminf_{\epsilon \to 0} f(g(A+\epsilon))$. Por definición, existe $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in f(g(A+\epsilon))$ de modo que

$$\lim_{\epsilon \to 0} (u_\epsilon, v_\epsilon) = (u,v).$$

Por lo ya demostrado se tiene que, $\forall \epsilon > 0$, existe $(u_\epsilon, w_\epsilon) \in f(g(A))$ de forma que $v_\epsilon = w_\epsilon + F_\epsilon u_\epsilon$, y como $\lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon u_\epsilon = 0$ entonces $(u,v) \in \overline{f(g(A))} = f(g(A))$.

Finalmente supongamos que $f \in \mathcal{S}_0$. Por la ley de la composición para el caso acotado

$$f(g(A_\lambda)) = (f \circ g)(A_\lambda), \quad \forall \lambda > 0.$$

Basta pues tomar límites cuando $\lambda \longrightarrow 0$ en la anterior igualdad teniendo en cuenta que $\liminf_{\lambda \to 0} A_\lambda = A$ con $M(A_\lambda) \leq \max\{M(A), 1\}$ y la "continuidad" probada en la proposición 3.5 para las funciones de $\mathcal{S}_0$. ■

Teorema 3.13 *Sea $A \in \mathcal{M}$ con $A \notin \mathcal{L}(X)$. Se tienen las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_0$ entonces*

$$\{f(s) : s \in \sigma(A)\} \subseteq \sigma(f(A)).$$

(ii) *Si $f(z) \in \mathcal{S}_0$ entonces*

$$\sigma(f(A)) = \{f(s) : s \in \sigma(A)\} \cup \{f(\infty)\}.$$

(iii) *Si $f(z) \in \mathcal{T}_+ \setminus \mathcal{S}_0$ entonces*

$$\sigma(f(A)) = \{f(s) : s \in \sigma(A)\}.$$

Demostración. (i) En primer lugar si $s \in \sigma(A)$ es no nulo entonces

$$f(z) - f(s) = (z - s)\, h(z),$$

con

$$h(z) = \mu(\{0\}) + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{(1 + ts)\,(1 + tz)}\, d\mu(t) = \mu(\{0\}) + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{r + z}\, d\nu(r),$$

siendo $d\nu(r) = \frac{r^2}{r+s}\, d\mu(r^{-1})$ en $]0, \infty[$ y $\nu(\{0\}) = 0$. Tenemos $h(z) \in \mathcal{S}_0$ puesto que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{r}\, d\nu(r) = \int_{]0,\infty[} \frac{1}{1 + ts}\, d\mu(t).$$

Por el teorema 3.11 tenemos las inclusiones

$$h(A)\,(A - s) \subseteq f(A) - f(s) \subseteq (A - s)\, h(A)\ ,$$

pues por la proposición 3.5 se tiene $f(A) - f(s) = (f(z) - f(s))(A)$. Si $f(s) \in \rho(f(A))$ de la primera inclusión se deduce que $A - s$ es suprayectivo y de la segunda que es inyectivo; en consecuencia, al ser un operador cerrado, $(A - s)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ lo que contradice la elección de s. Así deducimos que $f(s) \in \sigma(f(A))$.

Analicemos ahora el caso que hemos excluido. Si $0 \in \sigma(A)$ vamos a comprobar que $a = f(0) \in \sigma(f(A))$ con lo quedará probada nuestra afirmación. Como comentamos en la nota 3.7 tenemos que para todo $b > 0$

$$f(A) - a = \int_{]b,\infty[} A_t \, d\mu(t) + A \int_{[0,b]} J_t^A \, d\mu(t)|_{\overline{D(A)}}.$$

Nótese que

$$\int_{]b,\infty[} \|A_t\| \, d|\mu|(t) \leq 2(M(A)+1) \int_{]b,\infty[} \frac{1}{1+t} d|\mu|(t) \to 0,$$

si $b \to \infty$. Si suponemos que $a \in \rho(f(A))$ tenemos:

$$A \int_{[0,b]} J_t^A \, d\mu(t)|_{\overline{D(A)}} = [1 - \int_{]b,\infty[} A_t \, (f(A)-a)^{-1} \, d\mu(t)] \, (f(A)-a),$$

luego eligiendo b suficientemente grande el operador $A \int_{[0,b]} J_t^A \, d\mu(t)|_{\overline{D(A)}}$ es invertible en $\mathcal{L}(X)$. Si $(u,v) \in A$ entonces

$$\int_{[0,b]} J_t^A v \, d\mu(t) \in A \int_{[0,b]} J_t^A u \, d\mu(t),$$

por lo que $(u,0) \in A$ implica $0 \in A \int_{[0,b]} J_t^A u \, d\mu(t)$, de donde $u = 0$, es decir, A es inyectivo. Como evidentemente $R(A) = X$ y A es cerrado se tiene $0 \in \rho(A)$.

(ii) Si $f(z) \in \mathcal{S}_0$ entonces $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ con

$$f(A) = a + \int_{]0,\infty[} A_t \, d\mu(t),$$

donde la integral es convergente en $\mathcal{L}(X)$. Por tanto, considerando la notación introducida en el teorema 3.5, $f(A) \in \overline{\mathcal{L}} \subseteq (\mathcal{L}^c)^c$ y razonando como en el citado resultado, pero teniendo presente que $A \notin \mathcal{L}(X)$,

$$\sigma(f(A)) = \{a + \int_{]0,\infty[} \frac{s}{1+st} \, d\mu(t) : s \in \sigma(A)\} \cup \{a + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t} \, d\mu(t)\},$$

siendo válida la última igualdad por el hecho de que las formas lineales conmutan con la integral si $u(A_t)$ es $\mu(t)$-integrable, lo que sucede para todas las $u \in \mathcal{K}$.

(iii) Por la elección de f sabemos (ver teorema 3.6)que $f(A)$ es no negativo con $f(A)_\lambda = f_\lambda(A)$, $\forall \lambda > 0$. Además por el corolario 3.3 $f(A) \notin \mathcal{L}(X)$ luego por la proposición 2.7

$$\sigma(f(A)_\lambda) = \{\frac{s}{1+\lambda s} \; : \; s \in \sigma(f(A))\} \cup \{\frac{1}{\lambda}\},$$

y por el apartado anterior aplicado a f_λ tenemos

$$\sigma(f_\lambda(A)) = \{f_\lambda(s) \; : \; s \in \sigma(A)\} \cup \{\frac{1}{\lambda}\},$$

de donde se concluye la relación apuntada al igualar $\sigma(f(A)_\lambda)$ con $\sigma(f_\lambda(A))$. ∎

Capítulo 4 Potencias fraccionarias de operadores lineales multivaluados.

En el presente capítulo obtenemos una teoría de potencias fraccionarias de operadores lineales multivaluados no negativos para exponentes $\alpha \in \mathbb{C}$ con Re $\alpha > 0$. El cálculo funcional construido proporciona una definición, y la mayoría de las propiedades deseables de una teoría de potencias que pueda calificarse como tal, para el caso $0 < \mathrm{Re}\, \alpha < 1$, y ésta se podría extender por aditividad al resto de exponentes. No obstante, hemos preferido dar una definición global basada en la fórmula de diagonalización, que recordemos relaciona el caso denso con el multivaluado. Este tipo de extensión no es nueva: ya Martínez-Sanz en [MS] proponen una definición de potencias fraccionarias para operadores univaluados mediante esta técnica. Esta construcción permite utilizar, cuando sea factible, los resultados sobre potencias fraccionarias para operadores no negativos densamente definidos de la que existe una vasta literatura: véanse por ejemplo [Ba], [Ko1], [MSM] y [MS]. Como veremos, la obtención de algunos resultados importantes pasará inevitablemente por el cálculo funcional propuesto en el capítulo anterior, esencialmente debido a que es necesario salirse del ámbito de los operadores densamente definidos.

4.1 Construcción de las potencias fraccionarias. Aditividad.

Definición 4.1 *Sean* $\alpha \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *y* $A \in \mathcal{M}$. *Llamaremos* ***potencia fraccionaria de exponente*** α ***del operador*** A *al operador lineal* A^α *determinado por*

$$D(A^\alpha) = \{u \in \overline{D(A)} : (1+A)^{-1}u \in D(A_D{}^\alpha) \ y \ A_D{}^\alpha (1+A)^{-1}u \in D(A)\},$$

$$A^\alpha u = (1+A)\, A_D{}^\alpha (1+A)^{-1}u, \quad \forall u \in D(A^\alpha).$$

Nota 4.1 Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ con $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. Como comentamos en el ejemplo 3.2

$$z^\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha} \frac{z}{1+tz}\, dt, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

Por tanto, la función está en la clase $\mathcal{T}_0$ (incluso en $\mathcal{T}_+$ si α es real). Por el teorema 3.5 para $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ tenemos

$$A^\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha} A_t\, dt = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}\, A\, dt.$$

Siguiendo la construcción del cálculo funcional para $A \in \mathcal{M}$ se puede definir

$$A^\alpha = \liminf_{\lambda \to 0} (A_\lambda)^\alpha.$$

Por el teorema 3.9 se tiene

$$\begin{aligned} A^\alpha &= (1+A)\, A_D{}^\alpha (1+A)^{-1} \,|_{\overline{D(A)}} \\ &= \frac{sen\,\alpha\pi}{\pi} \Big(\int_1^\infty t^{-\alpha} A_t\, dt + A \int_0^1 t^{-\alpha} J_t^A\, dt \,|_{\overline{D(A)}} \Big), \end{aligned}$$

que coincide con la definición dada. El cálculo funcional proporciona directamente una serie de propiedades que enunciamos en el teorema siguiente.

Teorema 4.1 *Sean* $A \in \mathcal{M}$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta > 0$. *Se cumplen las propiedades que relacionamos a continuación:*

(i) *A^α es un operador cerrado con*

$$A^\alpha 0 = A0, \quad Ker\, A^\alpha = Ker\, A,$$

$$D(A) \subseteq D(A^\alpha) \subseteq \overline{D(A)} \quad y \quad R(A) \subseteq R(A^\alpha) \subseteq \overline{R(A)}.$$

(ii) *$D(A^\alpha) = D((A+\epsilon)^\alpha)$, $\forall \epsilon > 0$, y*

$$A^\alpha = \liminf_{\epsilon \to 0} (A+\epsilon)^\alpha.$$

(iii) *$A \in \mathcal{L}(X)$ si, y sólo si, $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$.*

(iv) *El operador uniforme*

$$W_\alpha(A) = \{(u, \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha} A_t u\, dt) \in X \times X : u \in D(A)\},$$

es cerrable con

$$\overline{W_\alpha(A)} = (A^\alpha)_D = (A_D)^\alpha.$$

En particular, si A es densamente definido entonces $A^\alpha = \overline{W_\alpha(A)}$. Además, si $\overline{D(A)} \subsetneq X$ entonces $(A_D)^\alpha \subsetneq A^\alpha$.

(v) *Si $\operatorname{Im} \alpha = 0$ entonces $A^\alpha \in \mathcal{M}$ con*

$$J_\lambda^{A^\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda\, t^\alpha}{1 + 2\lambda t^\alpha \cos \alpha\pi + \lambda^2 t^{2\alpha}} (t+A)^{-1}\, dt, \qquad \forall \lambda > 0,$$

y $M(A^\alpha) \leq M(A)$.

(vi) *$A^\alpha (J_\lambda^A)^\alpha u = (A_\lambda)^\alpha u + A0$, $\forall u \in X$, y $(J_\lambda^A)^\alpha A^\alpha u = (A_\lambda)^\alpha u$, $\forall u \in D(A^\alpha)$.*

(vii) *Si $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \beta = 0$ entonces para todo $a, b \geq 0$ se tiene que*

$$a\, A^\alpha + b\, A^\beta \in \mathcal{M}.$$

(viii) *Para toda sucesión $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $]0,1]$ con límite $\alpha > 0$ se cumple*

$$A^\alpha = \liminf_{n \to \infty} A^{\alpha_n}.$$

(ix) $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha$.

(x) $(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*$.

(xi) *Si* $\operatorname{Im} \alpha = 0$ *entonces* $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$.

(xii) *Si* $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1$ *entonces*

$$A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta},$$

y por consiguiente $D(A^\alpha) \subseteq D(A^\beta)$ *siempre que* $\operatorname{Re} \beta \leq \operatorname{Re} \alpha$.

(xiii) $A = A^\alpha A^{1-\alpha} = A^{1-\alpha} A^\alpha$.

(xiv) *Si* $A \in \mathcal{L}(X)$ *entonces*

$$\sigma(A^\alpha) = \{z^\alpha : z \in \sigma(A)\}, \tag{4.1}$$

mientras que cuando $A \notin \mathcal{L}(X)$ *si* $\operatorname{Im} \alpha = 0$ *se tiene la relación* (4.1) *y en otro caso se da, al menos, la inclusión* $\supseteq$ *de la citada relación.*

Las propiedades (xii) y (xiii) son las que nos permitirían extender por aditividad el concepto de potencia fraccionaria a exponentes $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} \alpha \geq 1$.

Teorema 4.2 *Sean* $A \in \mathcal{M}$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re} \alpha > 0$. *Se tiene que* A^α *es un operador cerrado.*

Demostración. Sea $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en A^α convergente a (u, v). De entrada $u \in \overline{D(A)}$. Puesto que

$$(1+A)^{-1} u_n \xrightarrow{n} (1+A)^{-1} u$$

$$A_D{}^\alpha (1+A)^{-1} u_n = (1+A)^{-1} v_n \xrightarrow{n} (1+A)^{-1} v$$

y es $A_D{}^\alpha$ cerrado, entonces $(1+A)^{-1} u \in D(A_D{}^\alpha)$ y

$$A_D{}^\alpha (1+A)^{-1} u = (1+A)^{-1} v \in D(A),$$

teniéndose por tanto que $(u, v) \in A^\alpha$. ■

El resultado clave para comprobar que se dispone de una teoría satisfactoria de potencias es la aditividad que nos permitirá, cuando sea necesario, recurrir a la teoría proporcionada por el cálculo funcional para exponentes α con $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. Necesitamos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 4.1 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $A \in \mathcal{M}$. Si $u \in D({A_D}^\alpha)$ y existe algún $z \in \mathbb{C}$ con $zu - {A_D}^\alpha u \in D(A)$ entonces $u \in D(A_D)$.*

Demostración. Supongamos primer lugar que $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. Determinamos n entero positivo de forma que si $\beta = (1-\alpha)/n$ entonces $\operatorname{Re}\beta < \operatorname{Re}\alpha$ y $\operatorname{Re}\beta < 1$. En particular $D({A_D}^\alpha) \subseteq D({A_D}^\beta)$. Como por la propiedad (iv) del teorema 4.1

$$zu - {A_D}^\alpha u \in D(A) \subseteq D((A^\beta)_D) = D({A_D}^\beta),$$

entonces ${A_D}^\alpha u \in D({A_D}^\beta)$, de donde, utilizando la aditividad para el caso denso,

$$u \in D({A_D}^{\alpha+\beta}) \subseteq D({A_D}^{2\beta}).$$

Repitiendo el argumento n veces concluimos que $u \in D({A_D}^{\alpha+n\beta}) = D(A_D)$.

Si $\operatorname{Re}\alpha \geq 1$ elegimos $\beta \in \mathbb{C}$ con $0 < \operatorname{Re}\beta < 1$. Razonando como anteriormente se tiene ${A_D}^\alpha u \in D({A_D}^\beta)$ y de nuevo por aditividad

$$u \in D({A_D}^{\alpha+\beta}) = D({A_D}^{\alpha+\beta-1}A_D) \subseteq D(A_D).$$

■

Teorema 4.3 (aditividad) *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $\operatorname{Re}\beta > 0$. Entonces*

$$A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}.$$

Demostración. La relación

$$A^\alpha A^\beta u = A^{\alpha+\beta} u, \quad \forall u \in D(A^\alpha A^\beta),$$

es inmediata a partir de la definición dada y de la aditividad para el caso de dominio denso.

Para probar la igualdad $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ basta con comprobar la inclusión de dominios $D(A^{\alpha+\beta}) \subseteq D(A^\alpha A^\beta)$. Sea $u \in D(A^{\alpha+\beta})$; por definición

$$(1+A)^{-1}u \in D({A_D}^{\alpha+\beta}) = D({A_D}^\alpha {A_D}^\beta)$$

y

$${A_D}^\alpha {A_D}^\beta (1+A)^{-1}u \in D(A).$$

Por el lema 4.1 tenemos que

$${A_D}^\beta (1+A)^{-1}u \in D(A_D).$$

luego $u \in D(A^\beta)$ y existe $w \in A^\beta u \cap \overline{D(A)}$. Es ya sencillo asegurar que $w \in D(A^\alpha)$ y, por consiguiente, $u \in D(A^\alpha A^\beta)$. ■

Teorema 4.4 *Para $A \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $0 < \beta < 1$, se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) $A^n = A \dots A$ *(n veces).*

(ii) $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha$.

(iii) $\overline{D(A^\alpha)} = \overline{D(A)}$, $\overline{R(A^\alpha)} = \overline{R(A)}$, $A^\alpha 0 = A0$ *y* $\operatorname{Ker} A^\alpha = \operatorname{Ker} A$.

(iv) $A \in \mathcal{L}(X)$ *si, y sólo si,* $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$.

(v) *Si* $\overline{D(A)} \subsetneq X$ *entonces* A^α *es una extensión estricta de* ${A_D}^\alpha$.

(vi) $(A^\beta)^\alpha = A^{\alpha\beta}$.

Demostración. (i) Por inducción sobre n. Si $n = 1$ el resultado es evidente. Si el resultado es válido para n entonces por aditividad $A^{n+1} = A^n A = A \dots A$.

(ii) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > \operatorname{Re}\,\alpha$. Por aditividad y la propiedad (ix) del teorema 4.1 se tiene:

$$(A^\alpha)^{-1} = ((A^{\alpha/n})^n)^{-1} = ((A^{\alpha/n})^{-1})^n = ((A^{-1})^{\alpha/n})^n = (A^{-1})^\alpha.$$

(iii) Si $n \in \mathbb{N}$ verifica $n > \operatorname{Re}\,\alpha$ entonces por aditividad y la proposición 2.6

$$D(A^n) \subseteq D(A^\alpha) \subseteq \overline{D(A)} = \overline{D(A^n)}.$$

La igualdad $A^\alpha 0 = A0$ es trivial. Las otras dos relaciones son consecuencia de aplicar las ya probadas a A^{-1} y tener presente el apartado precedente.

(iv) Es inmediato que si $A \in \mathcal{L}(X)$ entonces $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$. Recíprocamente, supongamos que $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$. Si $\operatorname{Re}\alpha < 1$ el resultado es conocido((iii) del teorema 4.1). Si $\operatorname{Re}\alpha = 1$ entonces $X = D(A^\alpha) \subseteq D(A^{1/2})$ con lo que $A^{1/2} \in \mathcal{L}(X)$ y por tanto $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\operatorname{Re}\alpha > 1$ entonces $X = D(A^\alpha) \subseteq D(A)$, de donde, al ser A cerrado, $A \in \mathcal{L}(X)$.

(v) Si A es multivaluado es evidente, mientras que en el caso univaluado es conocida la citada propiedad (se prueba a partir de la proposición 2.5).

(vi) Obsérvese que la propiedad tiene sentido plantearla ya que $A^\beta \in \mathcal{M}$ ((v) del teorema 4.1). Para la demostración utilícese de nuevo un argumento de aditividad junto con el apartado (xi) del citado teorema.
■

Proposición 4.1 *Sea $A \in \mathcal{M}$ con $D(A) \subsetneq \overline{D(A)}$. Si $0 < \operatorname{Re}\beta < \operatorname{Re}\alpha$ entonces*

$$D(A^\alpha) \subsetneq D(A^\beta).$$

Demostración. En primer término nótese que la condición $R(A) \subseteq D(A)$ implica $D(A) = X$, ya que si $u \in X$ entonces $A_1 u \in D(A)$ de donde $u \in D(A)$.

De la aditividad tenemos $D(A^\alpha) \subseteq D(A^\beta)$. Si los dos conjuntos fueran iguales para $u \in D(A^\alpha)$ de nuevo por la aditividad se tendría que $A^\alpha u = A^\beta A^{\alpha-\beta} u$, luego

$$u \in D(A^{2\alpha-\beta}) \subseteq D(A^{2(\alpha-\beta)}).$$

Mediante un proceso de inducción se concluye

$$u \in D(A^{n(\alpha-\beta)}), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y de ello se deduce por la aditividad que $D(A) = D(A^2)$. En consecuencia $D(A_D) = \underline{D(A)}$ y $R(A_D) \subseteq D(A_D)$. Por esta última relación tenemos $D(A_D) = \overline{D(A)}$ lo que contradice la elección de A. ■

Nota 4.2 Respecto de la condición exigida al dominio del operador obsérvese que en el caso univaluado equivalen $D(A)$ cerrado y $A \in \mathcal{L}(X)$

lo que evidentemente no es cierto cuando A es multivaluado. En este caso no es cierta la anterior propiedad si el dominio de A es cerrado. Basta por ejemplo, considerar el operador $A = \{0\} \times X$ para el que $A^\alpha = A$ cualquiera que sea el exponente α.

4.2 Teorema de la aplicación espectral.

Del cálculo funcional no se deduce directamente, de forma completa, el teorema de la aplicación espectral para el caso de exponentes complejos con parte imaginaria no nula y parte real entre cero y uno. En el siguiente teorema utilizamos las ideas expuestas por Balakrishnan en [Ba] para demostrar el citado resultado. La prueba se basa fuertemente en la estructura de álgebra de Banach de $\mathcal{L}(X)$ con X un espacio de Banach, por lo que no es exportable a espacios más generales. Posteriormente, utilizando la fórmula de diagonalización, daremos otra prueba alternativa apoyada en el caso denso para el que Martínez-Sanz en [MS] dan una prueba basada exclusivamente en representaciones integrales de la resolvente, y no en la estructura de álgebra de Banach citada. Esta demostración nos permite también extender a nuestra situación las representaciones integrales citadas.

Teorema 4.5 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $A \in \mathcal{M}$. Si $\sigma(A)$ es vacío lo mismo le sucede a $\sigma(A^\alpha)$, mientras que en otro caso se tiene la relación*

$$\sigma(A^\alpha) = \{z^\alpha : z \in \sigma(A)\}.$$

Demostración. Evidentemente podemos situarnos directamente en el caso $A \notin \mathcal{L}(X)$. Comenzaremos probando el resultado cuando $|\alpha|^2 < \operatorname{Re}\alpha$. Teniendo presente el ejemplo (3.1), y si tomamos $-\gamma \in \Omega_\alpha$, entonces por el teorema 3.5 se obtiene:

$$(4.2)\, (\gamma + z^\alpha)^{-1}(A) = \frac{1}{\gamma} + \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1 + 2\gamma t^\alpha \cos\alpha\pi + \gamma^2 t^{2\alpha}}\, A_t\, dt,$$

y es un operador de $\mathcal{L}(X)$. Por el teorema ?? $(\gamma+z^\alpha)^{-1}(A) = (\gamma+A^\alpha)^{-1}$. A partir de las igualdades

$$A^\alpha - z = (\gamma+A^\alpha)\,(1-(z+\gamma)\,(\gamma+A^\alpha)^{-1}) = (1-(z+\gamma)\,(\gamma+A^\alpha)^{-1})\,(\gamma+A^\alpha),$$

válidas para todo $z \in \mathbb{C}$, se prueba que $A^\alpha - z$ tiene inverso en $\mathcal{L}(X)$ si, y sólo si, $(1-(z+\gamma)(\gamma+A^\alpha)^{-1})$ tiene inverso en $\mathcal{L}(X)$, es decir,

$$z \in \sigma(A^\alpha) \Leftrightarrow z+\gamma \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{z+\gamma} \in \sigma((\gamma+A^\alpha)^{-1}).$$

Por el teorema 3.5 tenemos que

$$\sigma((\gamma+A^\alpha)^{-1}) = \{\frac{1}{\gamma+s^\alpha} : s \in \sigma(A)\} \cup \{0\},$$

de donde se deduce el resultado deseado.

Para el caso general es obvio que podemos determinar un entero positivo n de forma que α/n esté en las condiciones previas, con lo que se tiene:

$$\sigma(A^\alpha) = \sigma((A^{\frac{\alpha}{n}})^n) = \{\, s^n : s \in \sigma(A^{\frac{\alpha}{n}})\} = \{\, s^\alpha : s \in \sigma(A)\},$$

donde la primera identidad es consecuencia de la aditividad, la segunda de la proposición 2.1 y la tercera del caso ya demostrado. ∎

Proposición 4.2 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $A \in \mathcal{M}$. Se cumplen las relaciones:*

$$A_D{}^\alpha = A^\alpha{}_D, \quad \rho(A^\alpha) = \rho(A_D{}^\alpha)$$

y

(4.3) $(z-A^\alpha)^{-1} = (1+A_D)(z-A_D{}^\alpha)^{-1}(1+A)^{-1}, \quad \forall z \in \rho(A^\alpha).$

Demostración. Sea $u \in D(A_D{}^\alpha) \subseteq \overline{D(A)}$; entonces

$$A_D{}^\alpha(1+A)^{-1}u = (1+A_D)^{-1}A_D{}^\alpha u \in D(A_D{}^\alpha),$$

de donde $u \in D(A^\alpha{}_D)$ y $A_D^\alpha u = A^\alpha{}_D u$. Consideremos ahora $u \in D(A^\alpha{}_D)$; esta condición implica que $(1+A)^{-1}u \in D(A_D{}^{\alpha+1})$, por lo que al estar u en $\overline{D(A)}$ se puede afirmar que $u \in D(A_D{}^\alpha)$. Queda pues probada la primera igualdad.

Sea $z \in \rho(A^\alpha)$. Es evidente que $z - A_D{}^\alpha$ es inyectivo ya que $z - A^\alpha$ lo extiende y es inyectivo. Sea $w \in \overline{D(A)}$; por ser $z - A^\alpha$ suprayectivo existe $(u,v) \in A^\alpha$ tal que $w = zu - v$. Por tanto $v \in \overline{D(A)}$, de donde, teniendo presente que $A^\alpha{}_D = A_D{}^\alpha$, se deduce que $(u,v) \in A_D{}^\alpha$ y $w = zu - A_D{}^\alpha u$, es decir, $z - A_D{}^\alpha$ es suprayectivo. Como es un operador cerrado, por el teorema de la gráfica cerrada, se tiene que $(z - A_D{}^\alpha)^{-1} \in \mathcal{L}(X_D)$, esto es, $z \in \rho(A_D{}^\alpha)$.

Por otra parte, si $z \in \rho(A_D{}^\alpha)$, entonces $z - A^\alpha$ es inyectivo pues si existe $(u, v) \in A^\alpha$ con $0 = zu - v$, entonces $(u, v) \in A_D{}^\alpha$, de donde $u = 0$. Comprobemos que es suprayectivo. Sea $u \in X$; consideramos el elemento

$$v = (z - A_D{}^\alpha)^{-1}(1 + A)^{-1}u \in D(A_D{}^\alpha).$$

Como $zv - A_D{}^\alpha v \in D(A)$ entonces del lema 4.1 se sigue que $v \in D(A_D)$. Podemos por tanto elegir $w \in (1 + A)v \cap \overline{D(A)}$ y entonces

$$A_D{}^\alpha(1 + A)^{-1}w = zv - (1 + A)^{-1}u \in D(A),$$

es decir, $w \in D(A^\alpha)$ y

$$\begin{aligned}(z - A^\alpha)w &= zw - (1 + A)\, A_D{}^\alpha\, (1 + A)^{-1}w \\ &= zw + (1 + A)\left((1 + A)^{-1}u - zv\right) \ni u,\end{aligned}$$

luego $z - A^\alpha$ es suprayectivo, y al ser cerrado se deduce, como queríamos, que $z \in \rho(A^\alpha)$. Es ya evidente que se verifica la relación (4.3). ■

Nota 4.3 Como anticipábamos, disponemos de una prueba alternativa del teorema de la aplicación espectral. En efecto, para cerciorarse basta tener en cuenta el teorema espectral para el caso denso y la proposición anterior que relaciona los espectros de A^α y de $A_D{}^\alpha$. ■

Corolario 4.1 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha|^2 < \operatorname{Re}\alpha$ y $A \in \mathcal{M}$. Se verifican las siguientes fórmulas integrales:*

(i) *Si $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{\lambda^\alpha e^{i\theta\alpha} : \lambda > 0,\ -\pi \le \theta \le \pi\}$ entonces*

$$(z - A^\alpha)^{-1} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{z^2 - 2\,z\,t^\alpha\cos\alpha\pi + t^{2\alpha}}\,(t + A)^{-1}\,dt.$$

(ii) *Si $z = s^\alpha$ con $s \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \cap \rho(A))$ entonces*

$$(z - A^\alpha)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\,s^{1-\alpha}\,(s - A)^{-1}$$

$$-\frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{s^{2\alpha} - 2\,s^\alpha\,t^\alpha\cos\alpha\pi + t^{2\alpha}}\,(t + A)^{-1}\,dt$$

(iii) *Si $r > 0$ entonces*

$$\left(r^{\alpha}\, e^{\pm i\alpha\pi} - A^{\alpha}\right)^{-1} = r^{1-\alpha}\, e^{\pm i\alpha\pi}\,(r+A)^{-1} + \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}$$
$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}\,(r-t)}{(t^{\alpha}-r^{\alpha})\,(t^{\alpha}-e^{\pm 2i\alpha\pi}\,r^{\alpha})}\,(1-r(r+A)^{-1})\,(t+A)^{-1}\,dt.$$

Demostración. La relación (4.3) junto con que las representaciones integrales son válidas para operadores densamente definidos (ver[MS]) y con que A_D es cerrado, conducen de forma sencilla a las igualdades apuntadas. ■

4.3 Potencias fraccionarias del operador adjunto.

Esta sección la dedicamos a intentar establecer una conexión entre los operadores $(A^*)^{\alpha}$ y $(A^{\alpha})^*$. El resultado que obtenemos sólo era conocido para operadores densamente definidos ([MS]); por otra parte únicamente para este tipo de operadores tenía sentido plantearse el citado problema. Recuérdese que el cálculo funcional proporciona la igualdad de ambos operadores cuando $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$.

Lema 4.2 *Sean $A \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $u \in X$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $(A_1)^n u \in D(A^{\alpha})$ entonces $u \in D(A^{\alpha})$.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n. Si $A_1 u \in D(A^{\alpha})$ entonces

$$A_1 u \in A J_1^A u \cap D(A^{\alpha}),$$

por lo que

$$J_1^A u \in D(A^{\alpha+1}) \subseteq D(A^{\alpha}),$$

luego $u \in D(A^{\alpha})$. Supongamos el resultado válido para n. Si $(A_1)^{n+1} u \in D(A^{\alpha})$ entonces por el caso $n = 1$ tenemos $(A_1)^n u \in D(A^{\alpha})$ y, por hipótesis de inducción, $u \in D(A^{\alpha})$. ■

Teorema 4.6 *Sea* $A \in \mathcal{M}$ *con* $A0 + \overline{D(A)} = X$ *o* $\operatorname{Ker} A + \overline{R(A)} = X$. *Sea* $\alpha \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re} \alpha > 0$. *Se cumple:*

$$(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > \operatorname{Re} \alpha$. Por la aditividad y las propiedades del adjunto

$$(A^*)^\alpha = ((A^*)^{\alpha/n})^n = ((A^{\alpha/n})^*)^n \subseteq (A^\alpha)^*.$$

Además

$$(A^*)^\alpha 0 = A^* 0 = \overline{D(A)}^\perp = \overline{D(A^\alpha)}^\perp = (A^\alpha)^* 0,$$

luego sólo queda por comprobar que $D((A^\alpha)^*) \subseteq D((A^*)^\alpha)$.

Asumamos que $A0 + \overline{D(A)} = X$ y comencemos demostrando que

$$(A^\alpha)^* 0 \cap \overline{D((A^\alpha)^*)} = \{0\}.$$

Sea $u^* \in (A^\alpha)^* 0 \cap \overline{D((A^\alpha)^*)}$. Entonces

$$\langle u^*, u \rangle = 0, \quad \forall u \in \overline{D(A)},$$

y existe una sucesión $\{(u_n^*, v_n^*)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $(A^\alpha)^*$ con $\lim_{n \to \infty} u_n^* = u^*$ y

$$\langle v_n^*, u \rangle = \langle u_n^*, v \rangle, \quad \forall (u, v) \in D(A^\alpha).$$

Como

$$\langle u_n^*, w \rangle = 0, \quad \forall w \in A0 = A^\alpha 0,$$

entonces u^* también se anula sobre $A0$ con lo que $u^* = 0$ por la hipótesis sobre A.

Sea $u^* \in D((A^\alpha)^*)$. Observemos en primer lugar que $J_1^{A^*}$ conmuta con $(A^\alpha)^*$. En efecto, al conmutar J_1^A con A^α, es decir, $J_1^A A^\alpha \subseteq A^\alpha J_1^A$, y tener $J_1^A \in \mathcal{L}(X)$ obtenemos:

$$J_1^{A^*} (A^\alpha)^* \subseteq (A^\alpha J_1^A)^* \subseteq (J_1^A A^\alpha)^* = (A^\alpha)^* J_1^{A^*}.$$

Así

$$\begin{aligned} (A_1^*)^n u^* &\in (A^*)^n (J_1^{A^*})^n u^* = (A^*)^{n-\alpha} (A^*)^\alpha (J_1^{A^*})^n u^* \\ &= (A^*)^{n-\alpha} (J_1^{A^*})^n (A^\alpha)^* u^*, \end{aligned}$$

por lo que existe $w^* \in A^*0$ de tal forma que

$$v^* = (A_1^*)^n u^* + w^* \in D((A^*)^\alpha).$$

Como $(A_1^*)^n u^* = u^* + x^*$ con $x^* \in D(A^*) \subseteq \overline{D((A^*)^\alpha)} \subseteq \overline{D((A^\alpha)^*)}$ podemos afirmar que

$$w^* \in (A^\alpha)^*0 \cap \overline{D((A^\alpha)^*)} = \{0\},$$

de donde $(A_1^*)^n u^* \in D((A^*)^\alpha)$ y por el lema anterior se concluye $u^* \in D((A^*)^\alpha)$.

Si se verifica la relación $\operatorname{Ker} A + \overline{R(A)} = X$ entonces A^{-1} está en las condiciones anteriores, luego

$$((A^{-1})^*)^\alpha = ((A^{-1})^\alpha)^*,$$

de donde, teniendo en cuenta que la operación de tomar inverso conmuta con las de tomar adjunto y elevar al exponente α, se deduce el resultado buscado. ■

Nota 4.4 Recuérdese que la condición exigida al operador en el teorema anterior se verifica si el espacio X es *reflexivo* (proposición 2.10). Obviamente las hipótesis del teorema incluyen los casos de dominio o rango denso.

Repasando la anterior demostración queda claro que en general se tiene la relación

$$(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^* \mid_{\overline{D(A^*)}},$$

quedando como problema abierto si la restricción a $\overline{D(A^*)}$ es innecesaria, como ha sucedido bajo la hipótesis del teorema previo o como ocurre cuando $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$.

4.4 Potencias fraccionarias de exponente α con $\operatorname{Re} \alpha < 0$.

Definición 4.2 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $Re\ \alpha < 0$. Definimos la* ***potencia fraccionaria de base A y exponente α*** *como:*

$$A^\alpha = (A^{-1})^{-\alpha} = (1 + A^{-1})\,(A_R)^\alpha (1 + A^{-1})^{-1}\,|_{\overline{R(A)}}\,.$$

Teorema 4.7 *Sea $A \in \mathcal{M}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\ \alpha,\ \mathrm{Re}\,\beta < 0$. Se tiene:*

(i) $A^\alpha 0 = \mathrm{Ker}\,A$, $\mathrm{Ker}\,A^\alpha = A0$, $\overline{D(A^\alpha)} = \overline{R(A)}$ *y* $\overline{R(A^\alpha)} = \overline{D(A)}$.

(ii) A^α *es un operador cerrado.*

(iii) $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha$.

(iv) $(A_R)^\alpha = (A^\alpha)_D$. A^α *es una extensión de* $(A_R)^\alpha$ *si, y sólo si,* $\overline{R(A)} \subsetneq X$.

(v) *Si* $0 < |\gamma| < 1$ *entonces* $A^\gamma \in \mathcal{M}$ *y* $\forall \delta \in \mathbb{C}$ *con* $\mathrm{Re}\ \delta \neq 0$

$$(A^\gamma)^\delta = A^{\gamma\delta}.$$

(vi) $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$.

(vii) *Si* $A \in \mathcal{L}(X)$ *entonces*

$$\sigma(A^\alpha) = \begin{cases} \varnothing, & si\ \sigma(A) \setminus \{0\} = \varnothing \\ \{z^\alpha : z \in \sigma(A) \setminus \{0\}\}, & si\ \sigma(A) \setminus \{0\} \neq \varnothing \end{cases},$$

mientras que en otro caso

$$\sigma(A^\alpha) = \begin{cases} \{0\}, & si\ \sigma(A) \setminus \{0\} = \varnothing \\ \{z^\alpha : z \in \sigma(A) \setminus \{0\}\} \cup \{0\}, & si\ \sigma(A) \setminus \{0\} \neq \varnothing \end{cases}.$$

(viii) *Si* $R(A) \subsetneq \overline{R(A)}$ *y* $\mathrm{Re}\ \alpha <\ \mathrm{Re}\,\beta$, *entonces*

$$D(A^\alpha) \subsetneq D(A^\beta).$$

(ix) *Si* $A0 + \overline{D(A)} = X$ *o* $\mathrm{Ker}\,A + \overline{R(A)} = X$ *(o incluso si* $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$*) entonces*

$$(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*.$$

Demostración. Sólo requiere alguna aclaración el apartado (vii). Éste es consecuencia de que para $z \in \mathbb{C}^*$ se verifica la implicación

$$\frac{1}{z} \in \rho(A) \Rightarrow z \in \rho(A^{-1}),$$

pues en la citada situación se tiene

$$(z - A)^{-1} = \frac{1}{z}(1 - \frac{1}{z}(\frac{1}{z} - A)^{-1}) \in \mathcal{L}(X),$$

y del teorema 4.5 de la aplicación espectral que nos permite afirmar: si $\sigma(A^{-1}) = \varnothing$ entonces $\sigma(A^\alpha) = \varnothing$ y en otro caso $\sigma(A^\alpha) = \{z^{-\alpha} : z \in \sigma(A^{-1})\}$. ■

Nota 4.5 La composición de potencias fraccionarias de la misma base $A \in \mathcal{M}$ y de exponentes con partes reales de signo diferente puede no verificar la aditividad. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $Re\,\beta < 0 < Re\,\alpha$ y $Re\,(\beta+\alpha) < 0$. En primer lugar

$$A^\beta A^\alpha 0 = \operatorname{Ker} A = A^{\beta+\alpha} 0,$$

pero

$$A^\alpha A^\beta 0 = A0,$$

y recuérdese que $A0 \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$. Por tanto, no podemos esperar conexión alguna entre $A^\alpha A^\beta$ y $A^{\alpha+\beta}$, a menos que exijamos de A y A^{-1} que sean univaluados. Además,

$$\operatorname{Ker} A \subseteq D(A^\beta A^\alpha) \quad \text{y} \quad \operatorname{Ker} A \cap D(A^{\beta+\alpha}) = \{0\}.$$

En consecuencia, para relacionar los operadores $A^\beta A^\alpha$ y $A^{\beta+\alpha}$ es necesario suponer que A^{-1} es univaluado. Con esta restricción, por la aditividad, obtenemos:

$$A^\beta A^\alpha = A^{\beta+\alpha} A^{-\alpha} A^\alpha = A^{\beta+\alpha}\,|_{D(A^\alpha)}\,.$$

Bibliografía

[Al1] ELH. ALAARABIOU, Calcul fonctionnel et puissance fractionnaire d'opérateurs linéaires multivoques non négatifs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **313** (1991), Série I, 163-166.

[Al2] ELH. ALAARABIOU, *Calcul fonctionnel et puissance fractionnaire d'opérateurs linéaires multivoques non négatifs*, Pub. Math. Besançon, An. non linéaire, fasc. 13, 1991.

[Ar] R. ARENS, Operational calculus of linear relations, *Pacific J. Math.* **11** (1961), 9-23.

[Ba] A. V. BALAKRISHNAN, Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them, *Pacific J. Math.* **10** (1960), 419-437.

[BBD] C. BERG, K. BOYADZHIEV and R. DELAUBENFELS, Generation of holomorfic semigroups, *J. Austral. Math. Soc.* (Series A) **55** (1993), 246-269.

[BL] Z. BOULMAAROUF and J-PH. LABROUSSE, The Cayley transform of linear relations, *J. Egyptian Math. Soc.* **2** (1994), 53-65.

[Br] H. BRÉZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Notas de Matemática, Vol. 50, North-Holland-Elsevier, Amsterdam-London-New York, 1973.

[Br] H. BRÉZIS, *Análisis funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[CS] R. W. CARROLL and R. SHOWALTER, *Singular and degenerate Cauchy problems*, Academic Press, New York, 1976.

[CP] R. W. CROSS and P. PILLAY, Obiquitous properties of certain operational quantities of linear relations in normed spaces, *Quaestiones Mathematicae* **17** (1994), 487-498.

[DS] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear operators, part. I*, Interscience, New York, 1958.

[Er] A. ERDÉLYI, *Tables of integral transforms*, Vol. II, MacGraw-Hill, New York, 1954.

[FY1] A. FAVINI and A. YAGI, Multivalued linear operators and degenerate evolution equations, *Annali Mat. Pura App.* (IV), **163** (1993), 353-384.

[FY2] A. FAVINI and A. YAGI, Abstract second order differential equations with applications, *Funkcial. Ekvac.* **38** (1995), 81-99.

[Fo] G. B. FOLLAND, *Real analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[GG] V. I. GORBACHUC and M. L. GORBACHUC, *Boundary value problems for operator differential equations, mathematics and its applications* (Soviet Series), Vol. 48, Kluwer Academic Publishers, 1984.

[Ha] A. HARAUX, *Nonlinear evolution equations-global behavior of solutions*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[HP] E. HILLE and R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, Providence, R. I., 1957.

[Hi1] F. HIRSCH, Intégrales de résolvants et calcul symbolique, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble **22**, Fasc. 4 (1972), 239-264.

[Hi2] F. HIRSCH, Familles d'opérateurs potentiels, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble **25**, Fasc. 3 (1975), 263-288.

[Hi3] F. HIRSCH, Domaines d'operateurs representés comme integrales de résolvents, *J. Funct. Anal.* **23**, No 3 (1976), 199-217.

[Hi4] F. HIRSCH, Extention des propietés des puissances fractionaires, Seminaire du theorie du potenciel, Lecture notes in Math., Springer-Verlag, 563, 100-120.

[Ke] J. L. KELLEY, *Topología general*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1975.

[Ko1] H. KOMATSU, Fractional powers of operators, *Pacific J. Math.* **19** (1966), 285-346.

[Ko2] H. KOMATSU, Fractional powers of operators, III. Negative powers, *J. Math. Soc. Japan* **21** (1969), 205-220.

[Ko3] H. KOMATSU, Fractional powers of operators, V. Dual operators, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **17** (1970), 373-396.

[Ka] A. M. KRALL, Stieltjes differential-boundary operators III, multivalued operators-linear relations, *Pacific J. Math.* **59** (1975), 125-134.

[MSM] C. MARTÍNEZ, M. A. SANZ and L. MARCO, Fractional powers of operators, *J. Math. Soc. Japan* **40**, No 2 (1988), 331-347.

[MS] C. MARTÍNEZ and M. A. SANZ, Fractional powers of non-densely defined operators, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) **23**, Fasc. 3 (1991), 443-454.

[MS] C. MARTÍNEZ and M. A. SANZ, *Fractional powers of non-negative operators*, Elsevier-Science Publishers, B. V. North-Holland Mathematics Studies, to appear.

[Pu1] E. I. PUSTYL'NIK, Absolutely concave functions of positive operators, *Dokl. Akad. Nauk.* SSSR **228**, No 5 (1976), 547-550 (Russian) (English translation in *Soviet Math. Dokl.* **17**, No 3 (1976), 783-787).

[Pu2] E. I. PUSTYL'NIK, On functions of a positive operators, *Mat. Sbornik.* **119**, No 1 (1982), 32-47 (Russian) (English translation in *Math. USSR-Sb.* **47** (1984), 27-42).

[Ru] W. RUDIN, *Análisis funcional*, Reverté, Barcelona, 1979.

[Wi] D. V. WIDDER, *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1946.

[Ya] A. YAGI, Generation theorem of semigroup for multivalued linear operators, *Osaka J. Math.* **28** (1991), 385-410.

[Yo] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

UNIVERSIDAD DE VALENCIA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de D. Vicente Javier Pastor Murcia la calificación de APTO CUM LAUDE

Valencia, a 10 de Septiembre de 1996

El Secretario,

El Presidente

Universitat de València
Facultat de Matemàtiques
Departament de Matemàtica Aplicada

Un Cálculo Funcional Para Operadores Lineales Multivaluados. Potencias Fraccionarias.

Memoria presentada por
Vicente Javier Pastor Murcia
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Junio de 1996

D. Celso Martínez Carracedo y **D. Miguel Ángel Sanz Alix**, Catedráticos de Universidad del área de Matemática Aplicada del departamento de Matemática Aplicada de la Universitat de València,

CERTIFICAN: Que la presente memoria "**Un Cálculo Funcional para operadores lineales multivaluados. Potencias fraccionarias**", ha sido realizada bajo su dirección por **D. Vicente Javier Pastor Murcia** y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos, firman el presente certificado, en Burjassot, a 24 de Junio de 1996.

Fdo. Celso Martínez Carracedo

Fdo. Miguel Ángel Sanz Alix

Aprovecho la ocasión para agradecer vivamente a los profesores Celso Martínez Carracedo y Miguel Ángel Sanz Alix la estrecha colaboración que ha permitido confeccionar esta Memoria, así como la relación de amistad que ha presidido en todo momento. Sus valiosas ideas han sido esenciales en la consecución de los resultados originales que contiene este trabajo.

Asimismo hago extensivo el agradecimiento a los compañeros de la unidad de Ecuaciones Diferenciales por su ánimo y colaboración.

Finalmente, aunque no por ello en menor grado, quiero dar las gracias a mis padres y a Carmen por el ímpetu con que me han alentado constantemente.

A mis padres, a Carmen y a Alba.

Índice

Capítulo 1
Introducción.

Como indica el título, el objetivo del presente trabajo es construir un Cálculo Funcional para operadores lineales no negativos sobre un espacio de Banach no necesariamente univaluados, de forma que en el conjunto de funciones admisibles esté, al menos, z^α, $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, con el fin de obtener como corolario las propiedades exigibles a una teoría satisfactoria de potencias fraccionarias de operadores lineales multivaluados no negativos.

¿Por qué interesa considerar un concepto más amplio que el habitual de operador lineal? Fundamentalmente porque en el ámbito de los operadores lineales multivaluados siempre tienen sentido los operadores clausura, inverso y adjunto de uno dado.

Ya en 1961 R. Arens en [Ar] se interesó por este tipo de operadores construyendo un Cálculo Simbólico para relaciones lineales, es decir, para subespacios vectoriales del espacio $X \times X$ con X un espacio vectorial sobre un cuerpo K, donde las funciones admisibles son polinomios con coeficientes en el cuerpo K. Se obtienen, entre otras propiedades, la fórmula del producto, la ley de la composición y el teorema espectral cuando K es algebraicamente cerrado.

Por otra parte, en 1972 F. Hirsch en [Hi1] introduce el concepto de transformada de Stieltjes de una familia resolvente acotada, que le permite construir un Cálculo Funcional consistente en asociar a cada función $f(z)$ de la forma

$$f(z) = a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+tz}\, d\mu(t), \quad z \in C \setminus \mathbb{R}_-,$$

con $a \geq 0$ y μ una medida de Radon no negativa sobre $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ para la que $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+z}\, d\mu(t) < \infty$, y a un operador A no negativo densamente definido, un operador $f(A)$ determinado por

$$f(A) = \overline{a + \int_{\mathbb{R}_+} A\,(1+tA)^{-1} d\mu(t)}\ .$$

Las funciones admisibles son aquellas $f(z)$ para las que $f(z^{-1})$ es una transformada de Stieltjes (véanse [Hi1] o [Wi]), lo que en adelante indicaremos mediante $f(z) \in \mathfrak{T}_+$. Se obtienen las siguientes propiedades:

(i) $f(A)$ es un operador no negativo.

(ii) Si A tiene rango denso y f no es idénticamente nula, entonces

$$f(A)^{-1} = \tilde{f}(A^{-1}),$$

donde $\tilde{f}(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})} \in \mathfrak{T}_+$.

(iii) Si $f, g \in \mathfrak{T}_+$ entonces $f \circ g \in \mathfrak{T}_+$ y

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)) \qquad (\textit{estabilidad bajo composición}).$$

(iv) Si σ_e denota el espectro esencial entonces

$$\sigma_e(f(A)) = \{f(s) : s \in \sigma_e(A)\} \qquad (\textit{teorema espectral}).$$

En el trabajo [Hi2] se prueba además la siguiente propiedad:

(v) Si $f, g \in \mathfrak{T}_+$ y el producto $f\,g \in \mathfrak{T}_+$ entonces

$$(f\,g)(A) = f(A)\,g(A) \qquad (\textit{fórmula del producto}).$$

La teoría de Hirsch ha sufrido dos extensiones estrechamente relacionadas con el presente trabajo (consúltense [BBD], [Pu1] y [Pu2] para otras ampliaciones). La primera se debe a E. Alaarabiou que en [Al1] extiende el Cálculo Funcional de Hirsch a operadores multivaluados no negativos A sobre un espacio de Banach complejo X. El proceso de extensión se basa en considerar una adecuada topología sobre el conjunto

$\mathcal{M}$ de operadores multivaluados no negativos, de forma que el subconjunto de $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}_0 = \{A \in \mathcal{L}(X) :]-\infty, 0] \subseteq \rho(A)\}$$

resulta ser denso. De hecho,

$$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda + \lambda = A \quad \text{en} \quad \mathcal{M},$$

donde $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(1 - (1 + \lambda A)^{-1})$ es la resolvente de Yosida del operador A. Así, para $f \in \mathfrak{T}_+$ se define $f(A)$ mediante:

$$f(A) = \lim_{\lambda \to 0} f(A_\lambda + \lambda) \quad \text{en} \quad \mathcal{M},$$

donde $f(A_\lambda + \lambda)$ se calcula a partir del Cálculo Funcional de Dunford. Se obtienen las propiedades (i) a (iii) anteriores, vía la continuidad de $f(z)$ como aplicación de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}$. Destaquemos que para este Cálculo no se consiguen resultados importantes como son la fórmula del producto y el teorema de la espectral.

Como caso particular se construye la potencia fraccionaria A^α con $0 < \alpha < 1$, obteniéndose las siguientes propiedades:

1. $A^\alpha \in \mathcal{M}$,

2. $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}, \ 0 < \alpha, \beta < 1$,

3. $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha, \ 0 < \alpha < 1$,

4. $A = \liminf_{\alpha \to 1} A^\alpha$,

5. $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}, \ 0 < \alpha, \beta < 1$ con $\alpha + \beta \leq 1$,

quedando el teorema espectral como un problema abierto. Las cuatro primeras propiedades son consecuencia directa del Cálculo Funcional, mientras que la aditividad se demuestra con técnicas similares a las presentadas por Martínez-Sanz-Marco en [MSM], probando previamente que $A^\alpha 0 = A0$.

La segunda extensión a la que hemos hecho referencia, de próxima publicación, se debe a Martínez-Sanz, que en su monografía sobre potencias fraccionarias (véase [MS2]) extienden el Cálculo Operacional de

Hirsch en una doble vertiente: se amplía el conjunto de funciones admisibles de tal manera que éstas son aquellas $f(z)$ para las que $f(z^{-1})$ es una transformada de Stieltjes de una medida compleja de Radon sobre $\mathbb{R}_+$ (se incluyen por tanto la función $f(z) = z^\alpha$, con $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, y otras funciones interesantes como por ejemplo $f(z) = e^{-tz^\alpha}$, donde $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, que no pertenecen a la clase $\mathfrak{T}_+$), y por otra parte es válido para operadores univaluados no negativos no necesariamente densamente definidos. Se cumplen las propiedades (i) a (v) anteriores, con la salvedad de que el teorema de la aplicación espectral se obtiene parcialmente.

Dedicamos el capítulo 2 de esta memoria a estudiar las propiedades más importantes de los operadores lineales multivaluados no negativos sobre un espacio de Banach, clase de operadores sobre la que se construye un Cálculo Operacional.

En el capítulo 3, haciendo uso del Cálculo Funcional de Dunford, aunque también se podría partir del Cálculo presentado en [MS2] para operadores acotados no negativos de forma que fuera posible trabajar sobre una clase de espacios más general que los espacios de Banach, construimos un Cálculo Funcional que extiende al presentado por Alaarabiou, por el hecho de admitir una clase más amplia de funciones, y al propuesto por Martínez-Sanz en el sentido de que es válido para un conjunto más amplio de operadores, mediante la definición:

$$f(A) = \lim_{\lambda\to 0}\inf f(A_\lambda + \lambda).$$

Para este Cálculo se prueban las propiedades más deseables, que nos permiten calificarlo como tal, pero con técnicas totalmente distintas a las presentadas en [Al1], ya que para nuestras funciones $f(z)$ no tenemos asegurada la no negatividad del operador transformado $f(A)$. La idea base consiste en "bajar" al Cálculo para operadores de $\mathcal{L}(X)$ no negativos mediante la igualdad

$$f(A)^{-1} = \tilde{f}(A^{-1}),$$

que se prueba directamente a partir de la definición, junto con un resultado que relaciona $f(A)$ con $f(A+\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$. De estas propiedades se deduce que

$$f(A^*) = f(A)^*,$$

para una clase de funciones más amplia que $\mathfrak{T}_+$, donde A^* representa el adjunto del operador A, y confirmamos también que nuestra definición extiende a la propuesta por Martínez-Sanz.

Posiblemente el mejor resultado obtenido es la llamada *fórmula de diagonalización*

$$f(A) = (1+A)f(A)(1+A)^{-1}\mid_{\overline{D(A)}},$$

válida para cierta clase de funciones, que conecta el caso general con el caso densamente definido, toda vez que permite evaluar $f(A)$ de forma más sencilla, y que es determinante para obtener la fórmula del producto y la ley de composición antes mencionadas. Se obtiene además un teorema espectral que relaciona el espectro de $f(A)$ con el de A; en particular para $f \in \mathfrak{T}_+$ se consigue una relación completa entre ambos espectros.

En el capítulo 4, a partir de los resultados del Cálculo Simbólico, se introduce el concepto de potencia fraccionaria de base $A \in \mathcal{M}$ y exponente α, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, definiendo

$$A^\alpha = (1+A)\,{A_D}^\alpha\,(1+A)^{-1}\mid_{\overline{D(A)}},$$

donde $A_D = A \cap \overline{D(A)} \times \overline{D(A)}$, obteniendo las propiedades 1 a 5 antes relacionadas. Se podría dar una definición para la que directamente se verificara la aditividad (propiedad 5), extendiendo por aditividad la definición deducida del Cálculo Funcional; no obstante, es fácil convencerse de que ambas construcciones son equivalentes. En la sección siguiente se demuestra el teorema de la aplicación espectral

$$\sigma(A^\alpha) = \{z^\alpha : z \in \sigma(A)\}$$

de dos formas diferentes: con técnicas similares a las expuestas por Balakrishnan en [Ba], que se basan en la teoría de Algebras de Banach, o con las ideas propuestas en [MS2] que no necesitan de la citada teoría, y que por consiguiente, son válidas para espacios más generales. Con esta última técnica, se argumenta que la multiplicatividad (propiedad 2) sigue verificándose para exponentes α en un intervalo que contiene estrictamente a $]0,1]$. Además se establece, bajo ciertas condiciones, que

$(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*$. Finalizamos el trabajo exponiendo algunos resultados sobre potencias fraccionarias de exponente α, con $\operatorname{Re}\alpha < 0$, que son corolarios inmediatos de las mismas propiedades para el caso $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Por último, resaltar que las propiedades obtenidas permiten plantearse una serie de cuestiones que deberemos, por su interés, abordar más adelante, y entre las que destacamos las dos siguientes:

a) Posibilidad de definir potencias fraccionarias imaginarias puras sin necesidad de exigir propiedades adicionales al operador A. Para $\tau \in \mathbb{R}$ podríamos definir

$$A^{i\tau} = \liminf_{\lambda \to 0} (A_\lambda + \lambda)^{i\tau},$$

donde $(A_\lambda + \lambda)^{i\tau}$ se obtiene mediante el Cálculo Funcional holomorfo. La definición propuesta es coherente en el sentido de que $A^{i0} = 1$.

b) La teoría de potencias fraccionarias está íntimamente ligada al estudio de las ecuaciones de evolución. Por tanto, es de esperar que las técnicas establecidas, junto con la teoría de semigrupos para operadores multivaluados propuesta por A. Yagi en [Ya], permitan estudiar las inclusiones de evolución de orden $n \geq 2$ del tipo

$$\frac{d^n u}{dt^n} + Au \ni f(t),$$

que surgen, tras un cambio de variable, en el ámbito de las ecuaciones lineales de evolución degeneradas en la derivada temporal (véanse al respecto [FY1], [FY2] y [Ya]).

Capítulo 2
Operadores lineales multivaluados no negativos.

En este capítulo establecemos algunas de las propiedades más interesantes de los operadores multivaluados no negativos y de las potencias de exponente entero de los mismos. Nótese que, en principio, las potencias citadas no heredan la no negatividad; eso sí, comparten con el operador original alguna de sus características más importantes. Asimismo, se proporcionan algunos ejemplos de operadores no negativos propiamente multivaluados.

Observaremos también que en el ámbito de los operadores lineales multivaluados siempre tiene sentido considerar el inverso, el adjunto y la clausura de uno dado; de hecho, las dos primeras operaciones conservan la no negatividad.

2.1 Definiciones y propiedades.

Durante todo el trabajo $(X, \|\ \|)$ representará un espacio de Banach complejo. Si R, S son subconjuntos de X entonces definimos

$$R + S = \{u + v \in X : u \in R,\ v \in S\} \quad \text{y}$$
$$\alpha R = \{\alpha u \in X : u \in R\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Definición 2.1 *Llamaremos* ***operador lineal*** *sobre X a todo subespacio vectorial A de $X \times X$, y lo indicaremos mediante $A \subseteq X \times X$.*

Como es habitual utilizaremos la siguiente notación en relación con A:

$$D(A) = \{u \in X : \exists v \in X \text{ con } (u,v) \in A\} \ ,$$

$$Au = \{v \in X : (u,v) \in A\}, \quad \forall u \in D(A),$$

$$R(A) = \{v \in Au : u \in D(A)\} \quad \text{y} \quad \operatorname{Ker} A = \{u \in D(A) : 0 \in Au\}.$$

Es fácil comprobar que la linealidad de A está caracterizada por la propiedad

$$\alpha\, Au + \beta\, Av \subseteq A(\alpha\, u + \beta\, v), \quad \forall u, v \in D(A), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Si $A0 = \{0\}$ diremos que A es un operador lineal **univaluado** o **uniforme**, utilizando el concepto de **multivaluado** para el caso general, incluyéndose por tanto a los operadores univaluados.

Es evidente que $A0$, $D(A)$ y $R(A)$ son subespacios vectoriales de X, y que si $(u,v) \in A$ entonces $Au = v + A0$.

La siguiente propiedad es útil para probar que dos operadores A y B coinciden:

$$A \subseteq B, \ D(B) \subseteq D(A) \text{ y } B0 \subseteq A0 \Rightarrow A = B.$$

Diremos que el operador A es **cerrado** si A es un subconjunto cerrado de $X \times X$, lo que implica que $A0$ es cerrado, y que es **acotado** si el conjunto

$$\{v \in Au : \|u\| \leq 1 \quad \text{y} \quad u \in D(A)\}$$

es acotado. En este último caso A es uniforme, ya que si $v \in A0$ entonces se puede obtener a una relación del tipo

$$\|v\| \leq \frac{K}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde K es una constante, y por tanto $v = 0$.

Mediante $\mathcal{L}(X)$ denotaremos el álgebra de Banach de los operadores lineales y acotados definidos sobre todo X.

Sean $A, B \subseteq X \times X$. Definimos el operador **suma** de A y B como

$$A + B = \{(u, v + w) \in X \times X : (u,v) \in A, \ (u,w) \in B\},$$

y el **producto por un escalar** $\alpha \in \mathbb{C}$ mediante

$$\alpha A = \{(u, \alpha v) \in X \times X : (u, v) \in A\}.$$

Cuando hablemos del operador α haremos referencia a αI donde $I = \{(u, u) \in X \times X : u \in X\}$ es la identidad sobre X.

Definimos la **composición** o **producto** de A con B, que denotaremos AB, mediante

$$(u, v) \in AB \Longleftrightarrow u \in D(A) \text{ y existe } w \in Au \cap D(B) \text{ tal que } (w, v) \in B.$$

Es evidente que AB es un operador lineal sobre X .

A todo operador lineal A le podemos asociar un operador que denominaremos **inverso**, y que denotaremos mediante A^{-1}, determinado por la relación

$$(u, v) \in A^{-1} \Longleftrightarrow (v, u) \in A.$$

Nótese que $A^{-1}A$ es una extensión de la identidad restringida a $D(A)$, es decir,

$$\{(u, u) \in X \times X : u \in D(A)\} \subseteq A^{-1}A,$$

y que AA^{-1} extiende a la identidad sobre $R(A)$. Es un ejercicio sencillo probar que

$$A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}.$$

Destaquemos en este punto que las propiedades habituales de las operaciones previamente introducidas cuando se trabaja con operadores univaluados, no son válidas en general para operadores multivaluados. Por ejemplo, se tiene:

$$(2.1) \quad (\alpha + \beta) A \subseteq \alpha A + \beta A \text{ dándose la igualdad si } \alpha + \beta \neq 0.$$

Obviamente no siempre es cierta la igualdad (si $\{0\} \subsetneq A0$ entonces $0A \subsetneq A - A$). En consecuencia, el conjunto de operadores lineales sobre X no tiene estructura de espacio vectorial. Para $A, B, C \subseteq X \times X$ tenemos:

$$AB + AC \subseteq A(B + C), \text{ y si } D(A) = X \text{ se da la igualdad.}$$

Sin embargo, en general no es cierta la ley distributiva. Análogamente se tiene que

$$(B + C)A \subseteq BA + CA$$

siendo iguales si A es univaluado.

A un operador $A \subseteq X \times X$ se le puede asociar un operador lineal A^* sobre el espacio dual X^*, que llamaremos **adjunto**, determinado por:

$$A^* = \{(u^*, v^*) \in X^* \times X^* : \langle v^*, u\rangle = \langle u^*, v\rangle\,, \quad \forall (u,v) \in A\}.$$

Proposición 2.1 *Sean $A, B \subseteq X \times X$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) *A^* es cerrado.*

(ii) *Si $A \subseteq B$ entonces $B^* \subseteq A^*$.*

(iii) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(iv) $A^*0 = \overline{D(A)}^{\perp} = \{u^* \in X^* : \langle u^*, u\rangle = 0, \quad \forall u \in \overline{D(A)}\}$ *y* $\operatorname{Ker} A^* = \overline{R(A)}^{\perp}$.

(v) *A^* es univaluado si, y sólo si, A es densamente definido.*

(vi) *Si $A \in \mathcal{L}(X)$ entonces $A^* \in \mathcal{L}(X^*)$ con $\|A^*\| = \|A\|$.*

(vii) $(\alpha\, A)^* = \alpha\, A^*$.

(viii) *$A^*\, B^* \subseteq (B\, A)^*$. Si $B \in \mathcal{L}(X)$ entonces se da la igualdad.*

(ix) *$A^* + B^* \subseteq (A + B)^*$. Se da la igualdad siempre que $D(A^*) = X^*$ y $D(B) \subseteq D(A)$.*

Demostración. Utilícese la definición. Los apartados (v) y (vi) son consecuencia del teorema de Hahn-Banach. ∎

Para un operador lineal A definimos el conjunto **resolvente** de A, $\rho(A)$, mediante:

$$\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} : (z - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\},$$

y el **espectro** de A como $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$.

Notar que si A es cerrado entonces, por el teorema de la gráfica cerrada, $z \in \rho(A)$ si, y sólo si, $z - A$ es una biyección de $D(A)$ en X. Además, si $A = X \times X$ entonces $\sigma(A) = \mathbb{C}$ incluso cuando X es un espacio vectorial de dimensión finita, lo que pone de manifiesto un comportamiento anómalo respecto del caso univaluado. Al igual que en el caso uniforme se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2 *Sea $A \subseteq X \times X$. El conjunto $\rho(A)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Si $\rho(A) \neq \varnothing$ entonces la aplicación resolvente*

$$\begin{array}{rccc} R: & \rho(A) & \to & \mathcal{L}(X) \\ & z & \to & R_z = (z - A)^{-1} \end{array}$$

es holomorfa y se verifica la identidad resolvente:

$$R_z - R_y = (y - z)R_z R_y, \quad \forall z, y \in \rho(A).$$

Demostración. Si $\rho(A) = \varnothing$ la primera afirmación es evidente. En otro caso sea $z_0 \in \rho(A)$. Para $z \in \mathbb{C}$ tenemos:

$$z - A = (1 - (z_0 - z)R_{z_0})\,(z_0 - A),$$

luego si exigimos que

$$|\, z - z_0 \,|\, \|R_{z_0}\| < 1, \tag{2.2}$$

entonces

$$R_z = R_{z_0}\,(1 - (z_0 - z)\,R_{z_0})^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

por lo que z_0 es un punto interior de $\rho(A)$.

Supongamos que $\rho(A) \neq \varnothing$ y sea $z_0 \in \rho(A)$. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ verifica la condición (2.2) entonces

$$\frac{R_z - R_{z_0}}{z - z_0} = -R_{z_0}^2\,(1 - (z_0 - z)\,R_{z_0})^{-1},$$

luego

$$\lim_{z \to z_0} \frac{R_z - R_{z_0}}{z - z_0} = -R_{z_0}^2.$$

Finalmente, $\forall y, z \in \rho(A)$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} R_z - R_y & = & (y - A)^{-1}(y - A)\,(z - A)^{-1} - (y - A)^{-1}(z - A)\,(z - A)^{-1} \\ & = & (y - z)\,R_y\,R_z. \end{array}$$

■

Se puede defnir un Cálculo Funcional para operadores lineales donde las funciones base son polinomios con coeficientes en un cuerpo K (ver [Ar]). Nosotros nos vamos a restringir a operadores A sobre X para los que

$$A0 \cap D(A) = \{0\}, \tag{2.3}$$

propiedad que veremos verifican los operadores no negativos, a sabiendas de que los resultados son válidos en el caso general, con la diferencia de ser la demostración algo más sofisticada.

Sea $p_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$ un polinomio con coeficientes complejos de grado n, $\alpha_n \neq 0$, y sea $A \subseteq X \times X$. Definimos $p_n(A)$ como el operador lineal

$$p_n(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0.$$

Teorema 2.1 *Sea $A \subseteq X \times X$ verificando* (2.3). *Sean $p_n(z)$ y $q_m(z)$ dos polinomios a coeficientes complejos. Se tiene:*

(i) $D(p_n(A)) = D(A^n)$, *sobreentendiendo que $A^0 = I$, y $p_n(A)0 = A0$ si $n \geq 1$.*

(ii) *Si $n \neq m$ o en el caso de ser $n = m$ se tiene que la suma de los coeficientes de mayor grado es no nula, entonces*

$$(p_n + q_m)(A) = p_n(A) + q_m(A).$$

(iii) $(p_n\, q_m)(A) = p_n(A)\, q_m(A)$.

(iv) $(p_n \circ q_m)(A) = p_n(\, q_m(A))$.

(v) *Supongamos que A es cerrado. Si $\sigma(A) = \varnothing$ entonces $\sigma(p_n(A)) = \varnothing$ y en otro caso*

$$\sigma(p_n(A)) = \{p_n(z) : z \in \sigma(A)\}.$$

Demostración. (i) La primera afirmación es evidente. Respecto de la segunda téngase en cuenta que (2.3) implica $A^s 0 = A0$ para $s = 1, 2, \ldots$ En efecto, en primer lugar $A0 \subseteq A^n 0$; la otra inclusión se prueba por inducción sobre n, ya que si $v \in A^n 0$ entonces existe $w \in A^{n-1}0 \cap D(A)$

tal que $(v, w) \in A$, pero, por la hipótesis de inducción, se tendría $w = 0$ y por tanto que $v \in A0$.

(ii) La inclusión $\subseteq$ de la igualdad propuesta es consecuencia de la propiedad (2.1) y de la conmutatividad y la asociatividad de la suma de operadores. Por otra parte, es evidente que el dominio de ambos operadores es $D(A^s)$ con $s = \text{máx}\,\{n, m\}$, y que el conjunto imagen del 0 también es el mismo en los dos casos, luego son iguales.

(iii) Comencemos probando que $(z\, p_n(z))(A) = A\, p_n(A)$. Tenemos:

$$A\, p_n(A) \supseteq \alpha_n\, A^{n+1} + \alpha_{n-1}\, A^n + ... + \alpha_1\, A^2 + \alpha_0\, A = (z\, p_n(z))(A),$$

de donde razonando como en el apartado previo se deduce la igualdad. Evidentemente $(\alpha\, p_n(z))(A) = \alpha\, p_n(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}^*$. Por tanto, para $\alpha \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} (A - \alpha)\, p_n(A) &\subseteq A\, p_n(A) - \alpha\, p_n(A) = (z\, p_n(z))(A) - (\alpha\, p_n(z))(A) \\ &= ((z - \alpha)\, p_n(z))(A), \end{aligned}$$

y, por consiguiente, $(z - \alpha)(A)\, p_n(A) = ((z - \alpha)\, p_n(z))(A)$. Por último, teniendo en cuenta que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado y mediante un proceso de inducción se prueba la fórmula del producto en el caso general.

(iv) Si $p_n(z) = \alpha_n\, z^n + \alpha_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + \alpha_1\, z + \alpha_0$ se tiene:

$$\begin{aligned} p_n(\, q_m(A)) &= \alpha_n\, q_m(A)^n + \alpha_{n-1}\, q_m(A)^{n-1} + \ldots + \alpha_1\; q_m(A) + \alpha_0 \\ &= \alpha_n\, q_m^n(A) + \alpha_{n-1}\, q_m^{n-1}(A) + \ldots + \alpha_1\; q_m(A) + \alpha_0 \\ &= (p_n \circ q_m)(A), \end{aligned}$$

donde la primera identidad es consecuencia de la definición, la segunda de la fórmula del producto y la última del apartado (ii).

(v) Podemos suponer $n > 1$. Para $\delta \in \mathbb{C}$ tenemos, por la fórmula del producto, que

$$(2.4)\quad p_n(A) - \delta = (p_n(z) - \delta)(A) = \alpha_n(A - \delta_1)(A - \delta_2)...(A - \delta_n),$$

donde δ_i, $i = 1 \ldots n$, son las n raíces, posiblemente repetidas, del polinomio $p_n(z) - \delta$. Si $\sigma(A) = \varnothing$ entonces de la relación (2.4) se sigue que $\rho(p_n(A)) = \mathbb{C}$. Sea $\delta = p_n(z_0)$ para algún $z_0 \in \sigma(A)$ y supongamos que

$\delta \in \rho(p_n(A))$; por la relación (2.4), observando que los factores de la última igualdad conmutan, se tiene $z_0 \in \rho(A)$. Hemos probado por tanto la inclusión $\supseteq$ del enunciado. Si $\delta \in \sigma(p_n(A))$ es ya evidente que debe existir una raíz z_0 del polinomio $p_n(z) - \delta$ que esté en $\sigma(A)$, es decir, $\delta = p_n(z_0)$ con $z_0 \in \sigma(A)$. ■

Lema 2.1 *Sea $A \subseteq X \times X$. Si $z \in \rho(A)$ entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene:*

$$R_z A^n u \subseteq A^n R_z u, \quad \forall u \in D(A^n).$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n. Si $(u, v) \in A$ entonces

$$A R_z u \ni z R_z u - u = R_z v.$$

Supongamos que el resultado se verifica para n. Si $(u, v) \in A^{n+1}$ debe existir $w \in X$ con $(u, w) \in A^n$ y $(w, v) \in A$. Por tanto,

$$A^{n+1} R_z u = A A^n R_z u \supseteq A R_z w \ni R_z v.$$

■

Proposición 2.3 *Sea $A \subseteq X \times X$ verificando* (2.3) *y con $\rho(A) \neq \varnothing$. Se tiene que A^n es débilmente cerrado, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Vamos a probar por inducción sobre n que A^n es cerrado, de donde, al ser un operador lineal, se deduce que es débilmente cerrado. Para $n = 1$ es evidente por la hipótesis sobre el conjunto resolvente. Supongamos el resultado válido para n y comprobémoslo para $n + 1$. Sea $\{(u_m, v_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq A^{n+1}$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} (u_m, v_m) = (u, v).$$

Si $-z \in \rho(A)$ entonces por el lema anterior y la condición (2.3) obtenemos

$$(z + A)^{-1} v_m \in A^{n+1} (z + A)^{-1} u_m = A^n (u_m - z(z + A)^{-1} u_m),$$

y como

$$\lim_{m \to \infty} (u_m - z(z + A)^{-1} u_m, (z + A)^{-1} v_m) = (u - z(z + A)^{-1} u, (z + A)^{-1} v),$$

entonces por la hipótesis de inducción

$$(u - z(z + A)^{-1}u, (z + A)^{-1}v) \in A^n.$$

Por tanto $u - z(z + A)^{-1}u \in D(A^n)$, de donde, en particular, $u \in D(A)$. Finalmente,

$$v \in (z + A)(z + A)^{-1}v \subseteq (z + A)\, A^n(z + A)^{-1}Au = A^{n+1}u.$$

■

Definición 2.2 *Diremos que $A \subseteq X \times X$ es* ***no negativo*** *si*

$$J_\lambda^A := (1 + \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(X), \quad \forall \lambda > 0,$$

y

$$M(A) := \sup_{\lambda > 0} \left\| J_\lambda^A \right\| < +\infty.$$

Al conjunto de operadores lineales no negativos sobre X lo denotaremos por $\mathcal{M}(X)$ ($\mathcal{M}$ si no hay riesgo de confusión).

Definición 2.3 *Sea $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una red de operadores lineales sobre X. Como en* [A11]*, llamaremos* ***límite inferior*** *de la red siguiendo $\mathcal{I}$ al operador lineal*

$$\begin{aligned} \operatorname{lím\,inf} A_i = \{(u, v) \in X \times X : \exists \{(u_i, v_i)\}_{i \in \mathcal{I}} \textit{ convergente} \\ \textit{a } (u, v) \textit{ en } X \times X, \textit{ donde } (u_i, v_i) \in A_i, \forall i \in \mathcal{I}\}. \end{aligned}$$

Nota 2.1 Si $A_i = A$, $\forall i \in \mathcal{I}$, entonces $\operatorname{lím\,inf} A_i = \overline{A}$. También es evidente que $A = \operatorname{lím\,inf} A_i$ si, y sólo si, $A^{-1} = \operatorname{lím\,inf} A_i^{-1}$. Finalmente destacar que si $A_i \in \mathcal{L}(X)$, $\forall i \in \mathcal{I}$, y $\operatorname{lím\,sup} \|A_i\| < +\infty$, entonces $\operatorname{lím\,inf} A_i$ es un operador uniforme. Efectivamente, supongamos que $(0, v) \in \operatorname{lím\,inf} A_i$, entonces existe una red $\{u_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ en X convergente a cero y tal que la red $\{A_i u_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ converge a v , por lo que

$$\|v\| \leq \operatorname{lím\,sup} \|A_i\| \ \operatorname{lím} \|u_i\| = 0.$$

Proposición 2.4 *Sea* $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *una red en* $\mathcal{L}(X)$ *con* $\text{lím sup } \|A_i\| < +\infty$*, y sea* $A \in \mathcal{L}(X)$ *. Equivalen:*

(i) $A = \text{lím inf } A_i$,

(ii) $Au = \text{lím } A_i u$, $\forall u \in X$.

Demostración. Supongamos que $A = \text{lím inf } A_i$. Sea $u \in X$; existe una red $\{u_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ tal que $u_i \to u$ y $A_i u_i \to Au$. Así

$$\|A_i u - Au\| \leq \|A_i\| \, \|u_i - u\| + \|A_i u_i - Au\|,$$

luego $Au = \text{lím } A_i u$.

Asumamos ahora que A es el límite puntual de $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ en X. Claramente $\text{lím inf } A_i$ es una extensión de A y por el último comentario de la nota previa $\text{lím inf } A_i$ es un operador univaluado, luego son iguales. ■

Corolario 2.1 *Sea* $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *una red en* $\mathcal{M}$ *con* $\text{lím sup } M(A_i) < +\infty$ *y sea* $A \in \mathcal{M}$*. Equivalen:*

(i) $A = \text{lím inf } A_i$,

(ii) $J_\lambda^{A_i} u$ *converge a* $J_\lambda^A u$ *siguiendo* $\mathcal{I}$, $\forall u \in X$ *y* $\forall \lambda > 0$.

En esta situación se tiene además que $M(A) \leq \text{lím inf } M(A_i)$.

Demostración. La equivalencia es inmediata a partir del resultado anterior. Sea $u \in X$ con $\|u\| = 1$. Tenemos

$$\left\| J_\lambda^A u \right\| = \text{lím } \left\| J_\lambda^{A_i} u \right\| \leq \text{lím inf } M(A_i)$$

y en consecuencia $M(A) \leq \text{lím inf } M(A_i)$. ■

A cada operador $A \in \mathcal{M}$ le asociamos la familia de operadores de $\mathcal{L}(X)$, llamados habitualmente **regularización Yosida** del operador A,

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(1 - J_\lambda^A), \quad \forall \lambda > 0.$$

Se tiene:

$$AJ_\lambda^A u = A_\lambda u + A0, \quad \forall u \in X,$$

y

$$A_\lambda u = J_\lambda^A A u, \quad \forall u \in D(A).$$

Nótese que en el caso general tenemos $\|A_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}(M(A)+1)$, mientras que si $A \in \mathcal{L}(X)$ se tiene la acotación uniforme $\|A_\lambda\| \leq M(A)\,\|A\|$.

Proposición 2.5 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) $M(A) = 0$ *si, y sólo si,* $A = \{0\} \times X$. *En otro caso* $M(A) \geq 1$.

(ii) $A^{-1} \in \mathcal{M}$ *con* $J_\lambda^{A^{-1}} = 1 - J_{\lambda^{-1}}^A$, $\forall \lambda > 0$.

(iii) $A^* \in \mathcal{M}(X^*)$ *con* $M(A^*) = M(A)$.

(iv) *Para todo* $\lambda > 0$, $A_\lambda \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ *con*

$$J_\mu^{A_\lambda} = \frac{1}{\mu+\lambda}(\lambda + \mu J_{\mu+\lambda}^A), \quad \forall \mu > 0,$$

y $M(A_\lambda) \leq \text{máx}\,\{M(A), 1\}$. *Además*

$$(A_\lambda)_\mu = (A_\mu)_\lambda = A_{\mu+\lambda}, \quad \forall \mu, \lambda > 0.$$

(v) $A = \liminf_{\lambda \to 0} A_\lambda$ *y* $A^{-1} = \liminf_{\lambda \to +\infty} \lambda J_\lambda^A$.

(vi) *Si* $D(A)$ ($R(A)$) *no es denso en* X, *entonces para todo natural* n *se verifica que* $(X \setminus \overline{D(A)}) \cap R(A^n) \neq \varnothing$ $((X \setminus \overline{R(A)}) \cap D(A^n) \neq \varnothing)$.

Demostración. (i) Si $A = \{0\} \times X$ es evidente que A es no negativo con $M(A) = 0$, lo que no sucede en el conjunto de operadores lineales uniformes no negativos donde se tiene siempre $M(A) \geq 1$. Obsérvese que si $M(A) = 0$ entonces el operador A es el previamente citado. En otro caso existe $u \in D(A) \setminus \{0\}$ que podemos suponer unitario; entonces tomando $(u, v) \in A$ se tiene

$$\left\| u - \lambda J_\lambda^A v \right\| = \left\| J_\lambda^A u \right\| \leq M(A),$$

de donde haciendo $\lambda \to 0$ obtenemos $M(A) \geq 1$.

(ii) Sea $\lambda > 0$; por las siguientes equivalencias

$$v \in (1 + \lambda A^{-1})u \iff \lambda u \in A(v-u) \iff u = v - J_{\lambda^{-1}}^A v,$$

obtenemos que $J_\lambda^{A^{-1}} = 1 - J_{\lambda^{-1}}^A$ por lo que $A^{-1} \in \mathcal{M}$ con $M(A^{-1}) \leq M(A) + 1$.

(iii) Respecto del operador adjunto basta tener en cuenta que por las propiedades establecidas en la proposición 2.1 tenemos $J_\lambda^{A^*} = (J_\lambda^A)^*$, $\forall \lambda > 0$.

(iv) De las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} v = (1 + \mu A_\lambda)u &\iff v - u \in A((\lambda+\mu)u - \lambda v) \\ &\iff \mu v \in (1 + (\lambda+\mu)A)((\lambda+\mu)u - \lambda v) \\ &\iff u = \frac{1}{\mu+\lambda}(\lambda + \mu J_{\lambda+\mu}^A)v, \end{aligned}$$

se deduce

$$J_\mu^{A_\lambda} = \frac{1}{\mu+\lambda}(\lambda + \mu J_{\lambda+\mu}^A) \in \mathcal{L}(X), \quad \forall \mu > 0,$$

por lo que A_λ es no negativo con $M(A_\lambda) \leq \max\{M(A), 1\}$. Por otra parte

$$(A_\lambda)_\mu = \frac{1}{\mu}(1 - \frac{1}{\mu+\lambda}(\lambda + \mu J_{\lambda+\mu}^A)) = \frac{1}{\mu+\lambda}(1 - J_{\lambda+\mu}^A) = A_{\lambda+\mu}.$$

(v) Obsérvese en primer lugar que si $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ entonces $\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda = A$ en $\mathcal{L}(X)$ ya que

$$\|A_\lambda - A\| \leq \lambda M(A) \|A\|^2.$$

Evidentemente $\limsup_{\lambda\to 0} M(A_\lambda) < \infty$. Sean $u \in X$ y $\mu > 0$; se tiene:

$$\left\|J_\mu^{A_\lambda}u - J_\mu^A u\right\| = \mu \|(A_\mu)_\lambda u - A_\mu u\| \overset{\lambda\to 0}{\to} 0,$$

luego del corolario 2.1 se deduce que $A = \liminf_{\lambda\to 0} A_\lambda$. Tomando A^{-1} en el lugar de A se obtiene la segunda igualdad.

(vi) Sean $u \notin \overline{D(A)}$ y $\lambda > 0$. Tenemos que $(\lambda A_\lambda)^n u \in R(A^n)$ pero

$$(\lambda A_\lambda)^n u = (1 - J_\lambda^A)^n u = u + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (J_\lambda^A)^k u \notin \overline{D(A)}.$$

■

Nota 2.2 Para $A \in \mathcal{M}$ se comprueba mediante cálculos sencillos que $1 + A$ y ρA, $\rho > 0$, son operadores no negativos. En particular $J_\lambda^A \in \mathcal{M}$, $\forall \lambda > 0$.

Por otra parte $\{A_\lambda\}_{\lambda>0}$ es una familia resolvente, es decir, verifica

$$A_\lambda - A_\mu = (\mu - \lambda) A_\mu A_\lambda, \quad \forall \lambda, \mu > 0,$$

y además $\sup_{\lambda>0} \|\lambda A_\lambda\| < \infty$. En efecto, como en términos de la función resolvente $J_\lambda^A = \nu R_\nu$, donde $\nu = -\frac{1}{\lambda}$, a partir de la fórmula resolvente para R_ν se tiene

$$(\mu - \lambda) J_\mu^A J_\lambda^A = \mu J_\mu^A - \lambda J_\lambda^A, \quad \forall \lambda, \mu > 0,$$

luego

$$\begin{aligned} A_\lambda - A_\mu &= \frac{\mu - \lambda}{\lambda \mu}(1 - J_\lambda^A - J_\mu^A) + \frac{1}{\lambda \mu}(\mu J_\mu^A - \lambda J_\lambda^A) \\ &= \frac{\mu - \lambda}{\lambda \mu}(1 - J_\lambda^A - J_\mu^A + J_\mu^A J_\lambda^A) = (\mu - \lambda) A_\mu A_\lambda. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si tenemos $\{R_\lambda\}_{\lambda>0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ verificando la identidad resolvente y con $\sup_{\lambda>0} \|\lambda R_\lambda\| < \infty$, existe un único operador $A \in \mathcal{M}$ de modo que $A_\lambda = R_\lambda, \forall \lambda > 0$. Es obvio que un operador con estas características es único y debe ser $A = R_\lambda (1 - \lambda R_\lambda)^{-1}$. Comprobemos que A es independiente de λ. Sea $(u, v) \in (1 - \lambda R_\lambda)^{-1}$ entonces

$$R_\lambda (1 - \lambda R_\lambda)^{-1} u = \{R_\lambda (v + w) : w = \lambda R_\lambda w\}.$$

Para $\mu > 0$, por la identidad resolvente, se tiene:

$$(1 - \mu R_\mu) u = (1 + (\lambda - \mu) R_\mu)^{-1} u$$

de lo que se deduce

$$R_\lambda (1 - \lambda R_\lambda)^{-1} u = R_\mu (1 - \mu R_\mu)^{-1} u.$$

Intercambiando λ y μ obtenemos la igualdad buscada. Además, $J_\mu^A = 1 - \mu R_\mu$, $\forall \mu > 0$, confirmándose que $A \in \mathcal{M}$. Esta disquisición pone de manifiesto la estrecha conexión existente entre A y su regularización Yosida A_λ.

Como veremos más adelante, en la construcción del Cálculo Funcional, es interesante demostrar $A = \liminf_{\lambda\to 0} A_\lambda$ de forma constructiva. Observar en primer lugar que $\forall\lambda > 0$ y $\forall u \in X$

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\mu^{A_\lambda} u = J_\mu^A u,$$

ya que

$$\left\| J_\mu^{A_\lambda} u - J_\mu^A u \right\| \leq \lambda\,(M(A)+1)\,\|A_\mu u\| + \left\| J_{\lambda+\mu}^A u - J_\mu^A u \right\|.$$

Sea $(u,v) \in A$. Tenemos

$$\lim_{\lambda\to 0} J_1^{A_\lambda}(u+v) = u \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to 0} A_\lambda J_1^{A_\lambda}(u+v) = v,$$

luego $(u,v) \in \liminf_{\lambda\to 0} A_\lambda$. Supongamos ahora que $(u,v) \in \liminf_{\lambda\to 0} A_\lambda$, es decir, existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ verificando

$$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to 0} A_\lambda u_\lambda = v.$$

Se prueba fácilmente que

$$\lim_{\lambda\to 0} J_1^{A_\lambda}(1+A_\lambda)u_\lambda = J_1^A(u+v),$$

luego por la unicidad del límite $u = J_1^A(u+v)$ y por tanto $(u,v) \in A$.

En la siguiente proposición se demuestra una útil caracterización de las clausuras del dominio y del rango de A, que evidentemente no tienen por qué coincidir con todo el espacio X.

Proposición 2.6 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Para cualesquiera n y m enteros positivos se tiene:*

(i) $\overline{D(A)} = \{u \in X : \lim_{\lambda\to 0} (J_\lambda^A)^n u = u\} = \{u \in X : \lim_{\lambda\to 0} (\lambda A_\lambda)^n u = 0\}$ $= \overline{D(A^n)}$,

(ii) $\overline{R(A)} = \{u \in X : \lim_{\lambda\to\infty} (J_\lambda^A)^n u = 0\} = \{u \in X : \lim_{\lambda\to\infty} (\lambda A_\lambda)^n u = u\}$ $= \overline{R(A^n)}$,

(iii) $\overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} = \overline{D(A^n) \cap R(A^m)}$.

Demostración. (i) Comencemos probando la primera igualdad para $n = 1$. Sea $u \in D(A)$; tomando $v \in Au$ arbitrario tenemos:

$$\left\| J_\lambda^A u - u \right\| \leq \lambda\, M(A)\, \|v\| \overset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Utilizando la equicontinuidad de la familia $\{J_\lambda^A\}_{\lambda > 0}$ y mediante un argumento del tipo $\epsilon/3$ se obtiene el resultado sobre $\overline{D(A)}$. La otra inclusión es trivial.

Para $n \geq 2$ de la cadena de desigualdades

$$\left\| (J_\lambda^A)^n u - u \right\| \leq \|(1 - \lambda A_\lambda)^n u - u\| \leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (M(A) + 1)^{k-1} \left\| u - J_\lambda^A u \right\|$$

se deduce la inclusión

$$\{u \in X : \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda^A u = u\} \subseteq \{u \in X : \lim_{\lambda \to 0} (J_\lambda^A)^n u = u\},$$

que junto con la cadena de inclusiones inmediatas

$$\{u \in X : \lim_{\lambda \to 0} (J_\lambda^A)^n u = u\} \subseteq \overline{D(A^n)} \subseteq \overline{D(A)},$$

conduce a las igualdades

$$\{u \in X : \lim_{\lambda \to 0} (J_\lambda^A)^n u = u\} = \overline{D(A^n)} = \overline{D(A)}.$$

Por último, de la acotación

$$\|(\lambda A_\lambda)^n\| \leq (M(A) + 1)^{n-1} \|\lambda A_\lambda\|,$$

se obtiene la inclusión

$$\overline{D(A)} \subseteq \{u \in X : \lim_{\lambda \to 0} (\lambda A_\lambda)^n u = 0\}.$$

Recíprocamente, si $\lim_{\lambda \to 0} (\lambda A_\lambda)^n u = 0$ por la fórmula del binomio de Newton se deduce

$$u = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (J_\lambda^A)^k u,$$

concluyéndose que $u \in \overline{D(A)}$ ya que $(J_\lambda^A)^k u \in D(A)$, $\forall\lambda > 0$ y $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$.

(ii) Considerar el anterior apartado para A^{-1} observando que $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$.

(iii) La inclusión $\supseteq$ es inmediata. La otra comenzaremos probándola para $n = m$. Sea $u \in \overline{D(A)} \cap \overline{R(A)}$; por el apartado previo $\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda A_\lambda)^n u = u$. Como, por densidad, para cada $\lambda > 0$ podemos determinar $u_\lambda \in D(A^n)$ tal que $\|u_\lambda - u\| \leq 1/\lambda$ entonces

$$\|(\lambda A_\lambda)^n u - (\lambda A_\lambda)^n u_\lambda\| \leq \frac{(M(A)+1)^n}{\lambda}, \quad \forall\lambda > 0,$$

con lo que $\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda A_\lambda)^n u_\lambda = u$, de donde se deduce la inclusión deseada debido a que

$$A_\lambda{}^n u_\lambda = (J_\lambda^A)^n A^n u_\lambda \in A^n (J_\lambda^A)^n u_\lambda.$$

Finalmente, en el caso general tomamos $p = \text{máx}\{n, m\}$ y se tiene:

$$\overline{D(A)} \cap \overline{R(A)} = \overline{D(A^p) \cap R(A^p)} \subseteq \overline{D(A^n) \cap R(A^m)}.$$

■

Corolario 2.2 *Sean $A \in \mathcal{M}$, $\lambda > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) $A0 = A^n 0 = \operatorname{Ker}(J_\lambda^A)^n$. *Además* $A^n 0 \cap \overline{D(A^n)} = \{0\}$.

(ii) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^n = \operatorname{Ker} A_\lambda{}^n$ *y* $\operatorname{Ker} A^n \cap \overline{R(A^n)} = \{0\}$.

(iii) *A^n es un operador débilmente cerrado.*

(iv) *Si $\sigma(A)$ es el conjunto vacío entonces $\sigma(A^n)$ también lo es. En otro caso*

$$\sigma(A^n) = \{z^n : z \in \sigma(A)\}.$$

(v) *Si A es acotado entonces $A \in \mathcal{L}(X)$.*

Demostración. Por la proposición 2.6 se tiene $A0 \cap \overline{D(A)} = \{0\}$, luego por el teorema 2.1 $A0 = A^n 0$. Además es sencillo comprobar que

$A0 = \text{Ker}\,(J_\lambda^A)^n$. Como $\overline{D(A)} = \overline{D(A^n)}$ queda demostrado el apartado (i), y el segundo es consecuencia de éste.

Los apartados (iii) y (iv) se obtienen a partir de la proposición 2.3 y el teorema 2.1 respectivamente, eso sí, teniendo presente (i).

Sabemos que si A es acotado entonces es univaluado. Sea $u \in X$; como

$$\left\|u - J_\lambda^A u\right\| = \lambda\, \|A_\lambda u\| \leq \lambda\, M(A)\, K\, \|u\|,$$

con K constante, tenemos, por la proposición 2.6, que A es densamente definido. Si $u \in X$ existe una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(A)$ con $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Por ser A acotado, $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y, al ser A cerrado, se tiene $u \in D(A)$, con lo que $D(A) = X$. ■

Nota 2.3 Observar que del corolario anterior se desprende que si $A \in \mathcal{M}$ es *densamente definido* entonces A es un operador *univaluado*, y si A tiene *rango denso* entonces A es *inyectivo.*

La propiedad que probamos a continuación jugará un papel fundamental en la prueba del teorema espectral.

Proposición 2.7 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $\lambda > 0$. Si $A \in \mathcal{L}(X)$ entonces*

$$\sigma(A_\lambda) = \{\frac{z}{1+\lambda z} : z \in \sigma(A)\},$$

mientras que en otro caso

$$\sigma(A_\lambda) = \{\frac{z}{1+\lambda z} : z \in \sigma(A)\} \cup \{\frac{1}{\lambda}\}.$$

Demostración. Comencemos probando la inclusión $\supseteq$ para ambos casos. En primer lugar es evidente que $\frac{1}{\lambda} \in \rho(A_\lambda)$ si, y sólo si, $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $z \in \sigma(A)$, como A es no negativo, $z \neq -\frac{1}{\lambda}$, y por tanto, si $\frac{z}{1+\lambda z} \in \rho(A_\lambda)$ de la relación

$$z - A = (1+\lambda z)(\frac{z}{1+\lambda z} - A_\lambda)(1+\lambda A),$$

se deduce que $z \in \rho(A)$.

Para la inclusión restante partamos de s en el complementario del conjunto $\{\frac{z}{1+\lambda z} : z \in \sigma(A)\} \cup \{\frac{1}{\lambda}\}$ y comprobemos que $(s - A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Por la elección de s tenemos que $\frac{s}{1-\lambda s} \in \rho(A)$. Como

$$s - A_\lambda \subseteq (1 - \lambda s)(\frac{s}{1 - \lambda s} - A) J_\lambda^A,$$

entonces $\operatorname{Ker}(s - A_\lambda) \subseteq A0$, de donde, como $s \neq \frac{1}{\lambda}$, se deduce que $\operatorname{Ker}(s - A_\lambda) = 0$. Por otra parte para $u \in X$ construimos el elemento

$$v = \frac{1}{1 - \lambda s}(\frac{1}{1 - \lambda s}(\frac{s}{1 + \lambda s} - A)^{-1} - \lambda) u$$

y se cumple por la fórmula resolvente que $(s - A_\lambda)v = u$. En resumen, $(s - A_\lambda)^{-1}$ es un operador univaluado definido sobre todo X y cerrado, luego por el teorema de la gráfica cerrada está en $\mathcal{L}(X)$. ∎

En el resultado siguiente se proporciona una red de operadores no negativos "especiales", en el sentido de que están en la clase de operadores a los que se les puede aplicar el Cálculo Funcional de Dunford para funciones f holomorfas en $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, que "converge" a A.

Proposición 2.8 *El conjunto* $\mathcal{M}_0 = \{A \in \mathcal{L}(X) :]-\infty, 0] \subseteq \rho(A)\}$ *es un subconjunto de* $\mathcal{M}$. *Además,* $\forall A \in \mathcal{M}$, $\{A_\lambda + \lambda\}_{\lambda > 0} \subseteq \mathcal{M}_0$ *y*

$$A = \liminf_{\lambda \to 0} (A_\lambda + \lambda).$$

Demostración. Para $\lambda > 0$ con $2\lambda \|A\| < 1$ se tiene

$$\left\| J_\lambda^A \right\| \leq \frac{1}{1 - \lambda \|A\|} \leq 2.$$

Por otra parte, $J_\lambda^A = \mu R_\mu$ con $\mu = -1/\lambda$, y puesto que la función μR_μ es continua en el compacto $[-2\|A\|, 0]$, se deduce que J_λ^A está acotada si $2\lambda \|A\| \geq 1$. Luego se puede afirmar con propiedad que $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$. Evidentemente la red $\{A_\lambda + \lambda\}_{\lambda > 0}$ está en $\mathcal{M}_0$. La condición sobre el límite inferior se obtiene de forma inmediata probando directamente que

$$\liminf_{\lambda \to 0} (A_\lambda + \lambda) = \liminf_{\lambda \to 0} A_\lambda.$$

∎

Pese a que el operador A no sea univaluado se pueden considerar restricciones del mismo que conservan la no negatividad, con dominio denso, con rango denso, e incluso con ambos densos, sobre espacios de Banach adecuados, algunos de los cuales nos serán útiles en la construcción del Cálculo Simbólico. Consideramos los subespacios cerrados de X, y que por tanto dotados de la norma del espacio son espacios de Banach, siguientes: $X_D = \overline{D(A)}$, $X_R = \overline{R(A)}$ y $X_0 = \overline{D(A)} \cap \overline{R(A)}$.

Proposición 2.9 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Se tienen las siguientes afirmaciones sobre los operadores restricción:*

(i) $A_D = A \cap X_D \times X_D$ *es no negativo y densamente definido sobre* X_D.

(ii) $A_R = A \cap X_R \times X_R$ *es no negativo sobre* X_R *y tiene rango denso.*

(iii) $A_0 = A \cap X_0 \times X_0$ *es no negativo sobre* X_0 *y tiene dominio y rango densos.*

Demostración. En los tres casos se obtiene la no negatividad si para cada uno de los subespacios cerrados Y previamente considerados se cumple $J_\lambda^A Y \subseteq Y$, $\lambda > 0$. Si $Y = X_D$ esta relación es evidente. Por otra parte $J_\lambda^A R(A) \subseteq R(A)$, inclusión que se extiende a $\overline{R(A)}$ utilizando que $J_\lambda^A \in \mathcal{L}(X)$. El caso restante es ya inmediato.

Por la proposición 2.6 tenemos:

$$\overline{D(A_D)} = \{u \in X_D : \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda^{A_D} u = u\} = \{u \in X_D : \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda^A u = u\} = X_D.$$

Por otra parte es fácil convencerse de que $(A_R)^{-1} = (A^{-1})_D$ luego tiene rango denso. Finalmente, de la inclusión $D(A^2) \cap R(A) \subseteq D(A_0)$ y la proposición citada, se tiene que A_0 es densamente definido. Que tiene rango denso es ya inmediato de la relación $(A^{-1})_0 = (A_0)^{-1}$. ∎

Nota 2.4 El subespacio $X_+ = A0 + \overline{D(A)}$ de X es cerrado. Efectivamente, téngase presente que si $u \in D(A)$ y $v \in A0$, entonces

$$\|u\| = \lim_{\lambda \to 0} \left\| J_\lambda^A (u+v) \right\| \leq M(A) \, \|u+v\|,$$

y por consiguiente también

$$\|v\| \leq (M(A)+1) \, \|u+v\|,$$

En definitiva, se puede considerar $A_+ = A \cap X_+ \times X_+$ como operador sobre el espacio de Banach X_+. Obviamente es no negativo. Se tiene $\overline{D(A_+)} = \overline{D(A)}$, $\overline{R(A_+)} = A0 + \overline{D(A) \cap R(A)}$, $A_+0 = A0$ y $\operatorname{Ker} A_+ = \operatorname{Ker} A$; es decir, no se mejoran las características de A.

Proposición 2.10 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si X es un espacio de Banach* ***reflexivo****, entonces para todo entero positivo n se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) $X = A^n 0 \oplus \overline{D(A^n)} = \operatorname{Ker} A^n \oplus \overline{R(A^n)}$. *En particular A es univaluado (inyectivo) si, y sólo si, tiene dominio (rango) denso.*

(ii) $D(A^n) = \{u \in X : \limsup_{\lambda \to 0} \|A_\lambda^n u\| < \infty\}$ *y* $R(A^n) = \{u \in X : \limsup_{\lambda \to \infty} \lambda^n \left\|(J_\lambda^A)^n u\right\| < \infty\}$.

Demostración. (i) Por la proposición 2.6 y el corolario 2.2 para probar la primera igualdad es suficiente demostrarla para $n = 1$, y, como es habitual, la segunda se obtiene considerando A^{-1}. Sea $u \in X$; puesto que la red $\{J_\lambda^A u\}_{\lambda > 0}$ está acotada, podemos determinar una subred, que denotamos de igual modo, que converge débilmente a un elemento $v \in X$ cuando $\lambda \to 0$. Como $\overline{D(A)}$ es débilmente cerrado, por ser un subespacio vectorial fuertemente cerrado, entonces $v \in \overline{D(A)}$. Además, $u - J_\lambda^A u \in A(\lambda J_\lambda^A u)$ y converge débilmente a $u - v$, por lo que, al ser A débilmente cerrado, $u - v \in A0$. Basta pues escribir $u = (u - v) + v$.

(ii) La inclusión $\subseteq$ de la primera igualdad es evidente, y la otra inclusión la probaremos por inducción sobre n. Si $u \in X$ verifica que $\limsup_{\lambda \to 0} \|A_\lambda u\| < \infty$, entonces existe una subred de $\{A_\lambda u\}_{\lambda > 0}$, que denotamos de igual modo, que converge débilmente a un elemento $v \in X$ cuando $\lambda \to 0$. Como $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda^A u = u$ y A es débilmente cerrado, tenemos que $u \in D(A)$. Supongamos que el resultado es válido para $n - 1$. Sea $u \in X$ tal que $\limsup_{\lambda \to 0} \|A_\lambda^n u\| < \infty$ entonces de la relación

$$A_\lambda^{n-1} A_1 u = (\lambda A_1 + J_1^A) A_\lambda^n u,$$

se deduce

$$\limsup_{\lambda \to 0} \left\|A_\lambda^{n-1} A_1 u\right\| < \infty,$$

de donde, por hipótesis de inducción, se llega a que $A_1 u \in D(A^{n-1})$. En particular $u \in D(A)$, y por la proposición 2.6 tenemos que $\lim_{\lambda\to 0}(J_\lambda^A)^n u = u$. Por la elección de u existe una subred de $\{A_\lambda{}^n u\}_{\lambda>0}$, para la que conservaremos la misma notación, que converge débilmente a un elemento $v \in X$ cuando $\lambda \to 0$. En definitiva, como A^n es débilmente cerrado, se llega a que $u \in D(A^n)$.

La igualdad acerca del rango de A^n se obtiene, de nuevo, considerando A^{-1} en el papel de A en la relación que acabamos de probar. ■

Definición 2.4 *Sea $\omega \in [0, \pi]$. Diremos que un operador $A \subseteq X \times X$ es* ***$\omega-$sectorial*** *si*

$$\sigma(A) \subseteq S_\omega := \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \omega\} \cup \{0\},$$

y los operadores $z(z-A)^{-1}$ son uniformemente acotados para $z \in \mathbb{C} - S_\omega$. En el caso de $\omega = 0$ se entiende que $\sigma(A)$ se reduce a $\{0\}$ o es el conjunto vacío.

Dicho de otro modo, que A sea $\omega-$sectorial es equivalente a que los operadores $e^{i\theta}A$ son uniformemente no negativos (es decir, no negativos con la misma constante de no negatividad) para $|\theta| \leq \pi - \omega$; de hecho, en el lema que veremos a continuación se pone de manifiesto que basta con que sean no negativos, con lo que disponemos de un criterio más cómodo para determinar si un operador es $\omega-$sectorial.

Lema 2.2 *Sea $A \subseteq X \times X$ tal que $\sigma(A) \subseteq S_\omega$ con $\omega \in [0, \pi]$. Equivalen:*

(i) *A es $\omega-$sectorial.*

(ii) $M(\theta) = \sup_{\lambda>0} \lambda \left\|(\lambda e^{i\theta} - A)^{-1}\right\| < \infty$ *para $\omega \leq |\theta| \leq \pi$.*

Demostración. Sólo debemos comprobar (ii) $\Rightarrow$ (i), y para ello es suficiente con demostrar que la función $M(\theta)$ es continua en el compacto $\omega \leq |\theta| \leq \pi$. Por la fórmula resolvente, para θ_0, θ en el compacto citado, tenemos

$$\lambda R_{\lambda e^{i\theta}} = \lambda R_{\lambda e^{i\theta_0}}(1 + (e^{i\theta_0} - e^{i\theta})\lambda R_{\lambda e^{i\theta}}),$$

de donde, tomando supremos y despejando $M(\theta)$ suponiendo que $1 -$

$|\theta_0 - \theta| \, M(\theta_0) > 0$, llegamos a

$$M(\theta) - M(\theta_0) \leq \frac{M(\theta_0)^2 \, |\theta_0 - \theta|}{1 - |\theta_0 - \theta| \, M(\theta_0)},$$

donde hemos utilizado que $\left| e^{i\theta_0} - e^{i\theta} \right| \leq |\theta_0 - \theta|$. Análogamente,

$$M(\theta_0) - M(\theta) \leq \frac{M(\theta_0)^2 \, |\theta_0 - \theta|}{1 - |\theta_0 - \theta| \, M(\theta_0)},$$

poniéndose así de manifiesto la continuidad de $M(\theta)$ en θ_0. ■

Obsérvese que si A es $\omega-$sectorial entonces $A \in \mathcal{M}$ y también A^{-1} y A^* son $\omega-$sectoriales. Recíprocamente, si $A \in \mathcal{M}$ con $M(A) = 0$ entonces A es 0-sectorial, y en otro caso se tiene, al menos, que A es $\pi-$sectorial. En la siguiente proposición se consigue una propiedad más fuerte de forma análoga al caso univaluado.

Proposición 2.11 *Sea $A \in \mathcal{M}$ con $M(A) \neq 0$ y sea $\delta = \operatorname{arc\,sen}\,(1/M(A))$. Entonces A es $(\pi - \delta + \epsilon)-$sectorial para todo $0 < \epsilon \leq \delta$.*

Demostración. Consideremos $z = |z| \, e^{i\varphi}$, con $|z| > 0$ y $\pi - \delta + \epsilon \leq |\varphi| \leq \pi$, y comprobemos que $z \in \rho(A)$. Tomando $\lambda = -|z| / \cos\varphi$, que es positivo por la elección de φ, tenemos que

$$z - A = -(1 - (\lambda + z)(\lambda + A)^{-1})(\lambda + A),$$

y como

$$\left\| (\lambda + z)(\lambda + A)^{-1} \right\| \leq M(A) \frac{|\lambda + z|}{\lambda} = M(A) \text{ sen } |\varphi| < 1,$$

entonces $(z - A)^{-1} = -(\lambda + A)^{-1}(1 - (\lambda + z)(\lambda + A)^{-1}))^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Además

$$\left\| z(z - A)^{-1} \right\| \leq \frac{M(A)}{1 - M(A) \text{ sen } (\delta - \epsilon)} .$$

■

Nótese que el sector donde tenemos la acotación uniforme de $z(z-A)^{-1}$ es tanto mayor cuanto menor sea $M(A)$. En particular, si $M(A) = 1$ el operador es $(\frac{\pi}{2} + \epsilon)-$sectorial para todo $0 < \epsilon \leq \frac{\pi}{2}$.

2.2 Ejemplos.

En esta sección proporcionamos una lista de operadores no negativos propiamente multivaluados. Ésta se puede ampliar con los ejemplos propuestos en las referencias [Ya] sección 5 y [FY1] sección 6.

Ejemplo 2.1 Sea $(X, (\ ,\ ))$ un espacio de Hilbert complejo. Se dice que un operador lineal $A \subseteq X \times X$ es un operador **monótono** si

$$\mathrm{Re}\ (v, u) \geq 0, \quad \forall (u, v) \in A.$$

Un operador A monótono es **maximal monótono** si no admite extensiones estrictas (incluidas las no lineales) y monótonas. Se tiene que A es maximal monótono si, y sólo si, A es monótono y $R(1 + A) = X$. Si A es maximal monótono entonces A es no negativo con $M(A) = 1$. Nótese que si X es un espacio de Hilbert real y A es maximal monótono, entonces A es densamente definido, y en consecuencia, univaluado. Todas estas cuestiones se pueden consultar en [Br1] y [Ha].

Ejemplo 2.2 Para cada $A \in \mathcal{M}$ podemos construir el operador B sobre el espacio de Banach $X \times X$ mediante $D(B) = \{0\} \times D(A)$ y

$$B(0, u) = \{(v, w) : v \in X,\ w \in Au\}, \quad \forall u \in D(A).$$

Para todo $\lambda > 0$ se tiene que $J_\lambda^B(v, w) = (0, J_\lambda^A w)$, $\forall (v, w) \in X \times X$, y por tanto B es no negativo y siempre multivaluado lo sea A o no. Si A no es inyectivo también B^{-1} es propiamente multivaluado.

Este ejemplo confirma que se pueden construir operadores no negativos con dominio cerrado estrictamente contenido en el espacio de trabajo (basta partir de $A \in \mathcal{L}(X)$ no negativo en la construcción de B), lo que no sucede si nos restringimos a los que son uniformes (utilícese el teorema de la gráfica cerrada para convencerse de ello).

Ejemplo 2.3 Como ya hemos anticipado, tenemos otras formas más naturales e interesantes que la anterior, de construir operadores no negativos propiamente multivaluados: considerar el operador inverso de un operador uniforme no negativo y no inyectivo o el adjunto de un operador no densamente definido y no negativo. Por ejemplo, sea $X = C([a, b])$

dotado de $\|\,\|_\infty$. Fijamos $c \in]a,b[$ y $\varphi(x) \in X$ valiendo 0 en $[a,c]$ y estrictamente positiva en el resto del intervalo. Definimos el operador A sobre todo X mediante: $\forall \phi \in X$

$$(A\phi)(x) = \varphi(x)\phi(x) \quad , \quad \forall x \in [a,b]$$

Se tiene que $A \in \mathcal{L}(X)$, es no negativo y no es inyectivo, con lo que A^{-1} es un operador del tipo buscado.

Ejemplo 2.4 Consideremos el espacio de Banach $X = L^\infty(0,+\infty;\mathbb{C})$ dotado de $\|\,\|_\infty$. Definimos el operador univaluado

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{D}: & W^{1,\infty}(0,+\infty) & \to & X \\ & f & \to & -f' \end{array}$$

Evidentemente $\mathfrak{D}$ no es inyectivo. Comprobemos que $\mathfrak{D}$ es no negativo con $M(\mathfrak{D}) = 1$. Sea $\lambda > 0$. Si $f \in W^{1,\infty}(0,+\infty)$ es solución de la ecuación diferencial $f - \lambda f' = 0$, entonces existe una constante K tal que $f(x) = K\ e^{\frac{x}{\lambda}}$, pero esta función es de L^∞ si, y solamente si, $K = 0$, con lo que $1 + \lambda\mathfrak{D}$ es inyectivo.

Sea $g \in L^\infty(0,+\infty)$. Si $f \in W^{1,\infty}(0,+\infty)$ es solución de la ecuación diferencial $f - \lambda f' = g$, entonces

$$f(y)\ e^{-\frac{y}{\lambda}} - f(x)\ e^{-\frac{x}{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda}\int_x^y g(s)\ e^{-\frac{s}{\lambda}}\, ds, \quad \forall x,y \geq 0.$$

Como

$$f(y) = f(0) + \int_x^y f'(s)\, ds, \quad \forall y \geq 0,$$

se tiene que

$$\lim_{y\to\infty} f(y)\ e^{-\frac{y}{\lambda}} = 0,$$

luego

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_x^\infty g(s)\ e^{-\frac{s-x}{\lambda}}\, ds, \quad \forall x \geq 0.$$

Partamos de la función obtenida, y comprobemos que está en $W^{1,\infty}(0,+\infty)$ y que verifica la ecuación $f - \lambda f' = g$. Tenemos trivialmente que $f \in X$. Sea $\phi \in C_c^1(]0,+\infty[)$; utilizando el teorema de Fubini se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Big(\int_x^\infty g(s)\ e^{-\frac{s}{\lambda}} ds\Big)\ \phi'(x)\, dx &= \int_0^\infty g(s)\ e^{-\frac{s}{\lambda}}\Big(\int_0^s \phi'(x)\, dx\Big)\, ds \\ &= \int_0^\infty g(s)\ e^{-\frac{s}{\lambda}}\phi(s)\ ds, \end{aligned}$$

luego la derivada distribucional de f satisface la ecuación indicada, y de este hecho se obtiene también que $f' \in X$. Así $R(1+\lambda\mathfrak{D}) = X$.

En definitiva, $\forall\lambda > 0$ existe $(1+\lambda\mathcal{D})^{-1}$ definido sobre todo X y determinado por: $\forall g \in X$,

$$(J_\lambda^{\mathfrak{D}} g)(x) = \frac{1}{\lambda}\int_x^\infty g(s)\, e^{-\frac{s-x}{\lambda}}\, ds, \quad \forall x \geq 0.$$

Es ya evidente que $\mathfrak{D}$ es no negativo con $M(\mathfrak{D}) = 1$.

Tenemos pues que el operador integral $\mathfrak{J} = \mathfrak{D}^{-1}$ es un operador lineal multivaluado no negativo con dominio

$$R(\mathfrak{D}) = \{f \in L^\infty(0,+\infty) : \int_0^x f(s)\, ds \in L^\infty(0,+\infty)\},$$

de modo que

$$\mathfrak{J} f = \{-\int_0^x f(s)\, ds + K : K \in \mathbb{C}\}, \quad \forall f \in R(\mathfrak{D}).$$

Obviamente $R(\mathfrak{D})$ no es denso ya que $\mathfrak{J}$ es propiamente multivaluado. De cualquier forma esta afirmación es fácilmente constatable, ya que las constantes no nulas no forman parte de $\overline{R(\mathfrak{D})}$. En efecto, si $f = k \in \overline{R(\mathfrak{D})}$, $k \neq 0$, entonces existe $g \in R(\mathfrak{D})$ tal que $\|g - f\|_\infty \leq k/2$, pero esto implica que, para casi todo $x > 0$, $g(x) \geq k/2$ cuando $k > 0$ o $g(x) \geq -k/2$ cuando $k < 0$, lo que en cualquier caso se opone a la elección de g en $R(\mathfrak{D})$.

Obsérvese que los anteriores razonamientos se pueden reproducir si sustituimos $]0,+\infty[$ por todo $\mathbb{R}$. De igual forma análoga se prueba que el operador derivada es no negativo con constante de no negatividad igual a 1 y no inyectivo en $X = L^\infty(-\infty,0)$. Análogamente, el operador derivada es no negativo y no es inyectivo en $L^\infty(\mathbb{R})$.

También el operador lineal A, sobre el espacio de Banach $X = L^\infty(\mathbb{R})$ dotado de $\|\|_\infty$, definido mediante

$$D(A) = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) : g(x) := \int_0^x f(s)\, ds \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ y } \int_0^y g(x)\, dx \in L^\infty(\mathbb{R})\}$$

y

$$Af = \{-\int_0^y g(x)\, dx + Ky + L : K, L \in \mathbb{C}\}, \quad \forall f \in D(A),$$

es no negativo y propiamente multivaluado.

Capítulo 3
Cálculo Funcional sobre $\mathcal{M}$, asociado a transformadas de Stieltjes.

Puesto que vamos a construir un Cálculo Funcional (también se utilizan las expresiones Cálculo Simbólico o Cálculo Operacional), es necesario comenzar estableciendo lo que entendemos con este término.

Definición 3.1 *Sea $\mathfrak{L}$ el conjunto de todos los operadores lineales sobre el espacio de Banach X. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Para una clase $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{L}$ que contenga a los operadores de la forma zI para $z \in \Omega$, y para una clase $\mathcal{H}$ de funciones definidas en Ω con valores en $\mathbb{C}$, diremos que una aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \times \mathfrak{R} & \to & \mathfrak{L} \\ (f, A) & \to & f(A) \end{array}$$

*es un **Cálculo Funcional sobre** $\mathfrak{R}$ **, asociado a la clase** $\mathcal{H}$, si para toda $f \in \mathcal{H}$ verifica*

$$f(zI) = f(z)I, \quad \forall z \in \Omega.$$

En la siguiente sección estudiamos la clase de funciones numéricas sobre las que vamos a definir el Cálculo Simbólico: aquellas que, tras invertir la variable, son transformadas de Stieltjes de una medida compleja de Radon μ sobre $[0, \infty[$.

3.1 Las clases de funciones $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_+$, $\mathcal{T}_0$ y $\mathcal{S}_0$

La demostración de los resultados que detallamos a continuación se ha extraído de [MS2]. No obstante, los teoremas concernientes a la clase $\mathcal{T}_+$ ya habían sido probados por F. Hirsch en [Hi1].

Utilizaremos la notación $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ y $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$. Conside ramos el espacio $C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ de las funciones continuas con soporte compacto definidas sobre $\mathbb{R}_+$ dotado de la τ topología, es decir, las redes convergentes son aquellas que convergen uniformemente en $\mathbb{R}_+$ de modo que los soportes de todas las funciones de la red están contenidos en un compacto común. Por $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ denotaremos el espacio de funciones continuas que se anulan en ∞ dotado de $\|\|_\infty$, y mediante $C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ haremos referencia al espacio de funciones continuas y acotadas dotado de la misma norma. Recuérdese que $C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ es denso en $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

Identificamos las medidas complejas de Radon sobre $\mathbb{R}_+$ con las formas lineales y continuas μ sobre $C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. Por el teorema de Riesz-Markov μ se puede representar formalmente mediante $\mu = \mu_1 - \mu_2 + (\mu_3 - \mu_4)\, i$, donde μ_i es una medida no negativa de Radon para $1 \le i \le 4$. Además, por el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, se tiene que existe una medida no negativa de Radon ν sobre $\mathbb{R}_+$ y una función $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ localmente integrable respecto de ν, tales que $d\mu = \rho\, d\nu$. Finalmente la variación total $|\mu|$ de la medida μ viene dada por $d\,|\mu| = |\rho|\, d\nu$.

Definición 3.2 *Sea μ una medida compleja de Radon sobre $\mathbb{R}_+$ verificando que existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ con*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{|z_0 + t|}\, d\,|\mu|\,(t) < \infty, \tag{3.1}$$

y sea $a \in \mathbb{C}$. Llamaremos ***transformada de Stieltjes*** *de la medida μ con valor a en el infinito a la función $f(z) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ determinada por:*

$$f(z) = a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, d\mu(t).$$

La condición (3.1) asegura que la función f está bien definida. Efectivamente, basta observar que para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ se tiene la acotación

$$\frac{1}{|z+t|} \le \frac{1}{|z_0+t|}\,(1 + C(z)\; |z_0 - z|),$$

donde

$$C(z) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|}, & \text{si } \mathrm{Im}\, z \neq 0 \\ \frac{1}{\mathrm{Re}\, z}, & \text{si } \mathrm{Im}\, z = 0 \end{cases}.$$

Por convergencia dominada

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ (z>0)}} f(z) = a$$

por lo que escribiremos $f(\infty) = a$.

Proposición 3.1 *Si $f(z)$ es la transformada de Stieltjes de una medida μ, ésta está únivocamente determinada.*

Demostración. Supongamos que $f(z)$ es transformada de Stieltjes de dos medidas μ_1 y μ_2, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, d\mu_2(t), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-,$$

y comprobemos que μ_1 y μ_2 son iguales. Comencemos probando, por inducción completa sobre $n \in \mathbb{N}$, que

$$\text{(3.2)} \qquad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(z+t)^n}\, d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(z+t)^n}\, d\mu_2(t), \quad \forall z > 0.$$

Para $n = 1$ es evidente. Supongamos que se cumple para $1, 2, \ldots, n$. Sea $z > 0$ fijo; por el teorema de convergencia dominada

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(z+t)^{n+1}}\, d\mu_i(t) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+\epsilon+t}\, \frac{1}{(z+t)^n}\, d\mu_i(t), \quad i = 1, 2,$$

mientras que, desarrollando en fracciones simples y por la hipótesis de inducción,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+\epsilon+t}\, \frac{1}{(z+t)^n}\, d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+\epsilon+t}\, \frac{1}{(z+t)^n}\, d\mu_2(t), \quad \forall \epsilon > 0.$$

Por tanto, se verifica la relación (3.2) para $n+1$. Por el teorema de Stone-Weierstrass (versión compleja para espacios de Hausdorff localmente compactos), el álgebra compleja generada por la función $\frac{1}{1+t}$ es densa en $C_0(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$. En consecuencia, teniendo en cuenta que las medidas $\frac{1}{1+t}\,d\mu_i(t)$ son finitas ($i=1,2$), se deduce, por convergencia uniforme, que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+t}\,\psi(t)\,d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+t}\,\psi(t)\,d\mu_2(t), \quad \forall \psi \in C_0(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}).$$

En particular, si $\varphi(t) \in C_c(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ entonces, tomando $\psi(t) = (1+t)\varphi(t) \in C_0(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ en la anterior relación, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\,d\mu_1(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\,d\mu_2(t).$$

Por consiguiente, $\mu_1 = \mu_2$. ■

En definitiva, las transformadas de Stieltjes están unívocamente determinadas por la medida μ y por el valor de a. Por ello en adelante utilizaremos la notación $f(z) = (a,\mu)(z)$ para indicar de que transformada de Stieltjes estamos hablando. Al conjunto de transformadas de Stieltjes lo denotaremos por $\mathcal{S}$ (nótese que $\mathcal{S}$ dotado de la suma de funciones y del producto por un escalar habituales tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$). Por $\mathcal{S}_+$ entenderemos la subclase de $\mathcal{S}$ formada por las funciones $f(z) = (a,\mu)(z)$ con $a \geq 0$ y $\mu \geq 0$, y por último,

$$\mathcal{S}_0 = \{f(z) = (a,\mu)(z) \in \mathcal{S} :\ \mu(\{0\}) \ = \ 0 \text{ y } \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\,|\mu|\,(t) < \ \infty\}.$$

Proposición 3.2 *Sea $f(z) = (a,\mu)(z)$. Se tiene que $f(z)$ es analítica en el abierto $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Si $f(z) \in \mathcal{S}_+$ y no es idénticamente nula, entonces sus valores permanecen en el abierto $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, y si además no es constante, su restricción a $]0,\infty[$ es positiva y estrictamente decreciente.*

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Es obvio que

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = -\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(z+t)(z_0+t)}\,d\mu(t),$$

lo que junto con la acotación

$$\frac{1}{|z+t|\,|z_0+t|} \leq \frac{1}{|z_0+t|}\begin{cases} \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|}, & \text{si } \mathrm{Im}\, z \neq 0 \text{ y } \mathrm{Re}\, z \leq 0 \\ \min\{\frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|}, \frac{1}{\mathrm{Re}\, z}\}, & \text{si } \mathrm{Im}\, z \neq 0 \text{ y } \mathrm{Re}\, z > 0 \\ \frac{1}{\mathrm{Re}\, z}, & \text{si } \mathrm{Im}\, z = 0 \end{cases},$$

que permite utilizar convergencia dominada, conduce a que existe $f'(z_0)$ y vale

$$-\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(z_0+t)^2}\, d\mu(t).$$

Supongamos de aquí en adelante que $f(z) \in \mathcal{S}_+$ y no es idénticamente nula. Si $\mu = 0$ entonces $a > 0$ con lo que trivialmente $f(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-) \subseteq \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. En otro caso,

$$f(z) = a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\operatorname{Re} z + t}{|z+t|^2}\, d\mu(t) - i\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\operatorname{Im} z}{|z+t|^2}\, d\mu(t), \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,$$

luego si $\operatorname{Im} f(z) = 0$ se tiene $\operatorname{Im} z = 0$, y en consecuencia, $\operatorname{Re} f(z) > 0$ pues $\operatorname{Re} z > 0$. Se verifica por tanto la inclusión deseada.

Si suponemos que $f(z)$ no es constante, entonces μ no es idénticamente nula, por lo que $f(z)$, $z > 0$, hereda el carácter estrictamente decreciente de la función $\frac{1}{z+t}$ como función de z. ■

Nótese que $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{2}{z+1} \in \mathcal{S}$ no es idénticamente nula y $f(1) = 0$. Si $f(z) \in \mathcal{S}_+$ tiene sentido siempre $\lim_{z\to 0 (z>0)} f(z)$ cantidad que, aún en el caso de ser $+\infty$, denotaremos por $f(0)$. También para las funciones $f(z) \in \mathcal{S}_0$ se tiene, por convergencia dominada, que existe el anterior límite y vale a $a + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\mu(t)$.

Teorema 3.1 *Si una sucesión de transformadas de Stieltjes $f_n(z) = (a_n, \mu_n)(z) \in \mathcal{S}_+$ converge puntualmente a una función $f(z)$ sobre $]0,\infty[$, ésta es la restricción a $]0,\infty[$ de una función $\hat{f}(z) = (a,\mu)(z) \in \mathcal{S}_+$ y las medidas μ_n convergen vagamente a la medida μ, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, d\mu_n(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, d\mu(t), \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}).$$

Si además $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ entonces las medidas finitas $\frac{1}{z+t}\, d\mu_n(t)$ convergen estrechamente a la medida finita $\frac{1}{z+t}\, d\mu(t)$ para cualquier $z > 0$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\psi(t)}{z+t}\, d\mu_n(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\psi(t)}{z+t}\, d\mu(t), \quad \forall \psi \in C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}).$$

Demostración. Dividimos la prueba en varias fases:

1. *Construcción de la medida μ.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ construimos las formas lineales sobre $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$

$$v_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi(t)}{1+t} \, d\mu_n(t), \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}),$$

que son equiacotadas pues

$$\|v_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(1).$$

Consideramos el conjunto de funciones de $t \geq 0$

$$\mathcal{A} = \{\frac{1}{z+t} : z > 0, \, z \neq 1\} \subseteq C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}),$$

y sobre éste la aplicación

$$\begin{aligned} v(\frac{1}{z+t}) = \lim_{n \to \infty} v_n(\frac{1}{z+t}) &= \frac{1}{z-1} \lim_{n \to \infty} ((f_n(1) - a_n) - (f_n(z) - a_n)) \\ &= \frac{1}{z-1} (f(1) - f(z)), \end{aligned}$$

que extendemos por linealidad al subespacio vectorial generado por $\mathcal{A}$ que denotamos $\langle \mathcal{A} \rangle$. La clausura en $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ de $\langle \mathcal{A} \rangle$ contiene al álgebra compleja engendrada por la función $\frac{1}{1+t}$ que es densa en $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. La equicontinuidad de $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ junto con la densidad anunciada permiten extender v al espacio $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ como forma lineal positiva y continua verificando

$$v(\varphi) = \lim_{n \to \infty} v_n(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}).$$

Por el teorema de Riesz-Markov existe una única medida de Radon sobre $\mathbb{R}_+$, μ_0, no negativa y finita, tal que

$$v(\varphi) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t) \, d\mu_0(t), \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}).$$

Finalmente, definimos la medida μ mediante $d\mu(t) = (1+t) \, d\mu_0(t)$. Si $\mathcal{B} = \{\varphi(t) : (1+t) \, \varphi(t) \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})\} \supseteq C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, se tiene que toda $\varphi(t) \in \mathcal{B}$ es $\mu(t)$-integrable y

$$\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t) \, d\mu(t) = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t) \, d\mu_n(t),$$

y por tanto se verifica la convergencia vaga del enunciado.

2. *$f(z)$ es la restricción a $]0,\infty[$ de una función de $\mathcal{S}_+$.*

Sea $z > 0$. Consideramos la sucesión creciente de funciones de $\mathcal{B}$, $\frac{m}{(m+t)(z+t)}$, $m \in \mathbb{N}$, que converge puntualmente a $\frac{1}{z+t}$ en $\mathbb{R}_+$. Para $m > z$ tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{m}{(m+t)(z+t)}\, d\mu(t) = \frac{m}{m-z}\,(f(z) - f(m)),$$

luego, por el teorema de convergencia monótona,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, d\mu(t) = f(z) - f(\infty),$$

donde se sobreentiende que $f(\infty) = \lim_{m\to\infty} f(m)$, que existe, es finito y no negativo, ya que $f(z)$ es decreciente y toma valores no negativos, al ser límite puntual de funciones con dichas características. Por consiguiente, $f(z)$ es la restricción a $]0,\infty[$ de $(f(\infty),\mu)(z) \in \mathcal{S}_+$.

3. *Si $\lim_{n\to\infty} a_n = f(\infty)(= a)$ entonces las medidas finitas $\frac{1}{z+t}\, d\mu_n(t)$ convergen estrechamente a la medida finita $\frac{1}{z+t}\, d\mu(t)$, $\forall z > 0$.*

Sean $\psi \in C_b(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ y $z > 0$. Consideramos un natural $m > z$; se tienen las estimaciones siguientes:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, \psi(t)\, d\mu_n(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{m}{(m+t)(z+t)}\, \psi(t)\, d\mu_n(t) \right| \\ \leq \; & \|\psi\| \, (\frac{z}{m-z} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(z) + \frac{m}{m-z}(f_n(m) - a_n)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\, \psi(t)\, d\mu(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{m}{(m+t)(z+t)}\, \psi(t)\, d\mu(t) \right| \\ \leq \; & \|\psi\| \, (\frac{z}{m-z}\, f(z) + \frac{m}{m-z}(f(m) - a)). \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Evidentemente existe m_1 a partir del cual el segundo miembro de la segunda estimación es menor que $\epsilon/3$. También existe m_2 tal que las cantidades $\frac{z}{m-z} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ y $f(m) - a$ sean suficientemente pequeñas para los naturales posteriores. Sea $m_0 = \text{máx}\{m_1, m_2\}$. Teniendo en cuenta la descomposición

$$f_n(m_0) - a_n = (f_n(m_0) - f(m_0)) + (a - a_n) + (f(m_0) - a)$$

se comprende, recordando la hipótesis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, que existe un n_0 tal que, $\forall n \geq n_0$, el segundo sumando de la primera estimación, calculada para m_0, es menor que $\epsilon/3$. Por otra parte, como $\phi(t) = \frac{m_0}{(m_0+t)(z+t)}\ \psi(t) \in \mathcal{B}$, existe un n_1 tal que, $\forall n \geq n_1$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)\, d\mu_n(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)\, d\mu(t) \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Finalmente, utilizando las relaciones obtenidas, $\forall n \geq \text{máx}\{n_0, n_1\}$ tenemos:

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\ \psi(t)\, d\mu_n(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z+t}\ \psi(t)\, d\mu(t) \right| < \epsilon.$$

■

Teorema 3.2 *Sea $f(z) \in \mathcal{S}_+$. Las funciones $f_\lambda(z) = \frac{f(z)}{1+\lambda f(z)}$, $\lambda > 0$, y la función $\tilde{f}(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$, si $f(z)$ no se anula, permanecen en la clase $\mathcal{S}_+$.*

Demostración. Si $f(z)$ es constante el resultado es trivial, por lo que asumimos que esto no sucede. Sea $z > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, dividimos el intervalo $[0, n]$ en n^2 subintervalos de igual longitud, y llamamos $t_0, t_1, \ldots, t_{n^2}$, a los puntos de la partición resultante. Construimos la función escalonada

$$\psi_{n,z}(t) = \begin{cases} \frac{1}{z+t_p}, & \text{si } t \in [t_{p-1}, t_p[,\ p = 1, 2, \ldots n^2 \\ 0, & \text{si } t \in [t_{n^2}, \infty[\end{cases}.$$

Se comprueba que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{n,z}(t) = \frac{1}{z+t}, \quad \forall t \geq 0,$$

deduciéndose, por convergencia dominada, que

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} (a + \int_{\mathbb{R}_+} \psi_{n,z}(t)\, d\mu(t)) = \lim_{n\to\infty} (a + \sum_{1\leq p\leq n^2} \frac{c_p}{z+t_p}), \quad \forall z > 0,$$

donde $c_p = \mu([t_{p-1}, t_p[)$, $1 \leq p \leq n^2$. Por tanto, $f(z)$ es límite puntual en $]0, \infty[$ de una sucesión de funciones cada una de ellas de la forma

$$\alpha + \sum_{1 \leq p \leq m} \frac{A_p}{z + a_p}, \tag{3.3}$$

con α, a_p y A_p $(p = 1, \ldots, m)$ constantes no negativas, y el lema siguiente permite afirmar lo mismo de $f_\lambda(z)$ y $\tilde{f}\,(z)$. Como las funciones del tipo (3.3) están en $\mathcal{S}_+$, del teorema 3.1 concluimos que tanto $f_\lambda(z)$ como $\tilde{f}\,(z)$ están en $\mathcal{S}_+$. ■

Lema 3.1 *Si $h(z)$, $z > 0$, es de la forma* (3.3) *entonces las funciones $h_\lambda(z) = \frac{h(z)}{1+\lambda h(z)}$, $\lambda > 0$, y la función $\tilde{h}\,(z) = \frac{1}{h(\frac{1}{z})}$, siempre que $h(z)$ no se anule, admiten un desarrollo del mismo tipo.*

Demostración. Hagamos la prueba para el primer caso. Un razonamiento análogo es válido para la segunda situación. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A_p > 0$, $p = 1, \ldots, m$, y que $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_m$. Como $h(z)$ es estrictamente decreciente en todo su dominio entonces la ecuación $h(z) = -\frac{1}{\lambda}$ tiene exactamente m soluciones situadas en los intervalos $]-\infty, -a_m[,]-a_m, -a_{m-1}[, \ldots,]-a_2, -a_1[$. Por otra parte, podemos escribir

$$h_\lambda(z) = \beta + \frac{P(z)}{Q(z)},$$

con $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios, grado $(P(z)) <$ grado $(Q(z))$, y β constante no negativa, ya que $\beta = \lim_{z \to \infty} h_\lambda(z)$. Dado que las soluciones de $h(z) = -\frac{1}{\lambda}$ son raíces del polinomio $Q(z)$, entonces el desarrollo en fracciones simples de $h_\lambda(z)$ es de la forma

$$h_\lambda(z) = \beta + \sum_{1 \leq p \leq m} \frac{B_p}{z + b_p},$$

con $b_p \geq 0$, $p = 1, \ldots, m$. Además, puesto que

$$B_p = \lim_{z \downarrow -b_p} (z + b_p)\, h_\lambda(z),$$

se tiene $B_p \geq 0$, $p = 1, \ldots, m$. ∎

Nota 3.1 Para $f(z) \in \mathcal{S}_+$, si $f_\lambda(z) = (a_\lambda, \mu_\lambda)(z)$, como existe $\lim_{z \to 0 (z>0)} f_\lambda(z) < \infty$ y $f_\lambda(z) \geq \mu_\lambda(\{0\})\, z^{-1}$ entonces $\mu_\lambda(\{0\}) = 0$. Finalmente, por el teorema de convergencia monótona, $\frac{1}{t}$ es $\mu_\lambda(t)$-integrable y

$$\int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\mu_\lambda(t) = f_\lambda(0) - f_\lambda(\infty).$$

Por tanto tenemos que $f_\lambda(z) \in \mathcal{S}_0$, $\forall \lambda > 0$.

Introducimos la clases de funciones siguientes:

$$\mathcal{T} = \{\, f(z) : f(z^{-1}) \in \mathcal{S} \} \quad , \quad \mathcal{T}_+ = \{\, f(z) : f(z^{-1}) \in \mathcal{S}_+ \},$$

y $\mathcal{T}_0$ como el subconjunto de funciones $f(z) \in \mathcal{T}$ que no se anulan con $\tilde{f} \in \mathcal{T}$ y $\tilde{f}\,(0) = 0$.

Se tiene la inclusión $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{T}$. En efecto, si $f(z) = (a, \mu)(z) \in \mathcal{S}_0$, entonces $f(z)$ también se puede expresar en la forma

$$f(z) = b + \int_{]0,\infty[} \frac{z}{1 + sz}\, d\nu(s), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-,$$

con $b = a + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\mu(t)$, $d\nu(s) = -s^2 d\mu(s^{-1})$ en $]0, \infty[$ y $\nu(\{0\}) = 0$.

No es cierto que si $f(z) \in \mathcal{T}$ no se anula entonces $\tilde{f}\,(z) \in \mathcal{T}$ pues si tomamos $f(z) \in \mathcal{S}_0$ con $f(\infty) = 0$, como sucede por ejemplo con $f(z) = (0, te^{-t}dt)(z)$ o $f(z) = 1/(1 + z)$, entonces $\tilde{f}\,(z) \notin \mathcal{T}$ ya que no existe $\tilde{f}\,(0)$.

La condición $\tilde{f}\,(z) \in \mathcal{T}$ implica que $\lim_{z \to \infty (z>0)} 1/f(z)$ existe y vale $\tilde{f}(0)$. Si $\tilde{f}(0) = 0$ entonces

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ (z>0)}} |f(z)| = \lim_{\substack{z \to \infty \\ (z>0)}} \left(|a| + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1 + tz}\, d\,|\mu|\,(t) \right) = \infty,$$

y por tanto, si $\mu(\{0\}) = 0$, se tiene

$$\int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\,|\mu|\,(t) = \infty.$$

Si $\tilde{f}(0) \neq 0$ entonces

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ (z>0)}} f(z) = \frac{1}{\tilde{f}(0)},$$

de donde se deduce que $f(z)$, para $z > 0$, está acotada. Por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ (z>0)}} \frac{f(z)}{z} = \mu(\{0\}), \quad \forall f(z) \in \mathcal{T},$$

luego bajo nuestra hipótesis $\mu(\{0\}) = 0$.

De lo que acabamos de razonar se deduce que $\mathcal{T}_+$ es la unión disjunta de $\mathcal{T}_+ \cap \mathcal{T}_0$ y $\mathcal{T}_+ \cap \mathcal{S}_0$.

Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ no toma el valor nulo y $\tilde{f}(z) = (\tilde{a}, \tilde{\mu})(z^{-1}) \in \mathcal{T}$, entonces $\bar{f}(z) = \frac{z}{\tilde{f}(z)} \in \mathcal{T}$ con $\bar{f}(z) = (\tilde{\mu}(\{0\}), \bar{\mu})(z^{-1})$ donde $\bar{\mu}(\{0\}) = \tilde{a}$ y $d\bar{\mu}(s) = s\, d\tilde{\mu}(s^{-1})$ en $]0, \infty[$. Nótese, que si $f(z) \in \mathcal{T}_+$ no es idénticamente nula, entonces $\bar{f}(z) \in \mathcal{T}_+$. Además, existe $\tilde{\bar{f}}(z) = \tilde{\bar{f}}(z) \in \mathcal{T}$ y

$$\tilde{\bar{f}}(0) = \lim_{\substack{z\to 0 \\ (z>0)}} z\, f(z^{-1}) = \lim_{\substack{z\to 0 \\ (z>0)}} (a\, z + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{z+t} d\mu(t)) = \mu(\{0\}),$$

donde la última identidad se obtiene utilizando convergencia dominada en el límite de la integral. En consecuencia, $\bar{f}(z) \in \mathcal{T}_0$ si, y sólo si, $\mu(\{0\}) = 0$, lo que sucede seguro cuando $\tilde{f}(0) \neq 0$.

El producto de dos funciones de $\mathcal{T}$ no tiene por qué pertenecer a $\mathcal{T}$. Basta considerar que $f(z) = z \in \mathcal{T}_+$ y sin embargo $g(z) = z^2 \notin \mathcal{T}$ (de hecho, como $i^2 = -1$ se puede afirmar directamente que $z^2 \notin \mathcal{T}_+$).

Teorema 3.3 *Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}_+$) y $g(z) = (b, \nu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_+$ entonces $(f \circ g)(z) \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}_+$).*

Demostración. Sean $\nu_0 = \nu$ y ν_t la medida no negativa de Radon asociada a $g_t(z) = g(z)/(1 + tg(z)) \in \mathcal{T}_+$, $\forall t > 0$. Para $\varphi \in C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ la función sobre $\mathbb{R}_+$

$$t \to \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s)\, d\nu_t(s)$$

es continua por el teorema 3.1, y además, si $\operatorname{sop}\varphi \subseteq [0, N]$ entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s)\, d\nu_t(s)\right| &\le \|\varphi\|\,(1+N)\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+s}\, d\nu_t(s)\\ &= \|\varphi\|\,(1+N)(g_t(1) - \frac{b}{1+tb}),\end{aligned}$$

con lo que resulta ser $\mu(t)$-integrable. Podemos pues definir la forma lineal

$$\omega(\varphi) = \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s)\, d\nu_t(s))\, d\mu(t), \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}),$$

y vamos a comprobar que es continua, de tal suerte que habremos determinado una medida de Radon compleja (no negativa si μ lo es, ya que en ese caso la forma lineal es positiva) sobre $\mathbb{R}_+$ que denotaremos ω. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, τ-convergente a cierta función φ. Por tanto, $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{sop}\varphi_n$ es acotado y la sucesión es uniformemente convergente. Sea $K \ge 0$ tal que $\|\varphi_n\| \le K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y sea $\phi \in C_c(\mathbb{R}_+, [0,1])$ verificando $\phi(s) = 1$, $\forall s \in S$. Entonces la desigualdad

$$\left|\int_{\mathbb{R}_+} \varphi_n(s)\, d\nu_t(s)\right| \le K \int_{\mathbb{R}_+} \phi(s)\, d\nu_t(s),$$

permite aplicar convergencia dominada para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \omega(\varphi_n) = \omega(\varphi).$$

Para finalizar la prueba, determinamos una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_c(\mathbb{R}_+, [0,1])$ monótona creciente y convergente puntualmente a la unidad. Sea σ la medida de Radon no negativa asociada a la forma lineal positiva $\int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s)\, d\nu_t(s))\, d\,|\mu|\,(t)$. Para $z > 0$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi_n(t)\, \frac{z}{1+t\,z}\, d\sigma(t) = \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}_+} \phi_n(s)\, \frac{z}{1+s\,z} d\nu_t(s))\, d\,|\mu|\,(t),$$

de donde, aplicando convergencia monótona, se sigue que $\frac{z}{1+t\,z}$ es $\sigma(t)$-integrable. Como para todo conjunto de Borel B de $\mathbb{R}_+$ tenemos $|\omega|\,(B) \le$

$\sigma(B)$, por la definición de las medidas ω y σ y su regularidad, entonces $\frac{z}{1+t\,z}$ es $\omega(t)$-integrable. Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi_n(t) \frac{z}{1+t\,z} \, d\omega(t) = \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}_+} \phi_n(s) \frac{z}{1+s\,z} d\nu_t(s)) \, d\mu(t),$$

y por tanto, utilizando convergencia dominada, se deduce

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+t\,z} \, d\omega(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+s\,z} \, d\nu_t(s) \right) d\mu(t).$$

Ahora ya es sencillo comprobar que $(f \circ g)(z) = (f(b), \omega)(z^{-1})$, $z > 0$, y por analiticidad la identidad es válida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, quedando así de manifiesto que $f \circ g \in \mathcal{T}$. ∎

A continuación, vamos a proporcionar algunas funciones interesantes que están en la clase $\mathcal{T}$. La lista se puede completar consultando la referencia clásica [Wi] o el manual [Er] donde se proporciona una tabla de transformadas de Stieltjes. Téngase también presente que las propiedades que acabamos de probar, permiten obtener nuevos ejemplos a partir de los propuestos.

Ejemplo 3.1 Sea $\alpha = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ con $|\alpha|^2 < \mathrm{Re}\ \alpha$ (lo que implica que $0 < \sigma < 1$). Es fácil comprobar que si elegimos $\mu \in \mathbb{C}$ cumpliendo

$$|\mu| = e^{(\pi + \arg \mu)\ \frac{\sigma}{\tau}},$$

entonces $\mu \in \Omega_\alpha = \mathbb{C}^* \setminus \{\lambda^\alpha \ e^{i\alpha\theta} : \lambda > 0,\ \theta \in [-\pi, \pi]\}$, y que si $\mu \in \Omega_\alpha$ también $\mu^{-1} \in \Omega_\alpha$. Elegimos μ tal que $-\mu \in \Omega_\alpha$ con lo que la función $f(z) = (\mu + z^{-\alpha})^{-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$; consideramos $0 < r < |z| < R$ y $0 < \epsilon < \pi/2$, de forma que z esté en el interior de la curva Γ formada por la unión de las siguientes curvas:

$$\Gamma_1 = \ \left\{R\ e^{i\varphi} :\ \varphi \in [-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]\right\}, \Gamma_2 = \ \left\{r\ e^{i\varphi} :\ \varphi \in [-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]\right\},$$

$$\Gamma_3 = \ \left\{t\ e^{i(-\pi+\epsilon)} :\ t \in [r, R]\right\} \quad y \quad \Gamma_4 = \ \left\{t\ e^{i(\pi-\epsilon)} :\ t \in [r, R]\right\}.$$

Orientamos Γ en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(s)}{s - z} \, ds, \tag{3.4}$$

independientemente de la elección de los parámetros r, R y ϵ, elegidos, eso sí, en las condiciones ya apuntadas. Como $\forall \varphi \in [-\pi+\epsilon, \pi-\epsilon]$

$$\left|\frac{R\,e^{i\varphi}}{(\mu+R^{-\alpha}e^{-i\varphi\alpha})(R\,e^{i\varphi}-z)}-\frac{1}{\mu}\right| \leq \frac{|z|\,|\mu|\,R^{\sigma}e^{|\tau|\pi}-1)+|z|+R}{(R-|z|)(|\mu|\,R^{\sigma}e^{-|\tau|\pi}-1)\,|\mu|}$$

y

$$\left|\frac{r\,e^{i\varphi}}{(\mu+r^{-\alpha}e^{-i\varphi\alpha})(r\,e^{i\varphi}-z)}\right| \leq \frac{r^{\sigma+1}e^{|\tau|\pi}}{(|z|-r)(1-|\mu|\,r^{\sigma}e^{|\tau|\pi})},$$

entonces, al tomar límites en (3.4) cuando $R \to \infty$ y $r \to 0$, se tiene

$$(3.5)\quad f(z) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\Big(\frac{e^{i(-\pi+\epsilon)}}{(\mu+t^{-\alpha}e^{-\,i\alpha(-\pi+\epsilon)})(t\,e^{i(-\pi+\epsilon)}-z)} - \frac{e^{i(\pi-\epsilon)}}{(\mu+t^{-\alpha}e^{-\,i\alpha(\pi-\epsilon)})(t\,e^{i(\pi-\epsilon)}-z)}\Big)\,dt,$$

entendiendo la integral anterior como una integral de Riemann impropia. Si mediante $f(t,\epsilon)$ denotamos a la función del integrando, el hecho de poder obtener una acotación del tipo:

$$|f(t,\epsilon)| \leq \begin{cases} C\,t^{\sigma}, & 0<t<\delta \\ D\,t^{-\sigma-1}, & \delta<t \end{cases}$$

para una adecuada elección de δ, donde C y D son independientes de τ y ϵ, permite utilizar el teorema de convergencia dominada y concluir, tras tomar límites en (3.5) cuando $\epsilon \to 0$, que

$$f(z) = \frac{1}{\mu} + \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha}}{t^{2\alpha}\mu^2+2\,\mu\,t^{\alpha}\cos\alpha\pi+1}\,\frac{1}{z+t}dt.$$

Ahora ya es sencillo comprobar que $(\mu+z^{-\alpha})^{-1} \in \mathcal{S}_0$ y, por tanto, también es cierto que $(\mu+z^{\alpha})^{-1} \in \mathcal{S}_0$.

Ejemplo 3.2 La función z^{α}, para $\alpha \in \mathbb{C}$ con $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, está en la clase $\mathcal{T}_0$. Téngase en cuenta que, razonando como en ejemplo anterior,

$$z^{\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty} t^{-\,\alpha}\frac{z}{1+tz}\,dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-.$$

A partir de esta función es sencillo comprobar que, para cada $\epsilon > 0$, $(z+\epsilon)^{\alpha} \in \mathcal{T}$ y $(z+\epsilon)^{-\alpha}$, $(z(z+\epsilon)^{-1})^{\alpha} \in \mathcal{S}_0$.

Si $0 < \alpha < 1$ y $\lambda > 0$, se tiene

$$\frac{1}{\lambda + z^\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{\lambda^2 + 2\,\lambda\,t^\alpha\cos\,\alpha\pi + t^{2\alpha}}\frac{1}{z+t}\,dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-.$$

y por consiguiente está en $\mathcal{S}_0$. A partir de esta función obtendremos la representación integral de $J_\lambda^{A^\alpha}$.

Ejemplo 3.3 Para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, de nuevo por la fórmula integral de Cauchy, se verifica la relación:

$$e^{-t\,z^\alpha} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t\,s^\alpha\cos\,\alpha\pi}\operatorname{sen}(t\,s^\alpha\operatorname{sen}\alpha\pi)\,\frac{1}{z+s}\,ds, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-,$$

y consecuentemente $e^{-t\,z^\alpha} \in \mathcal{S}_0$.

Ejemplo 3.4 Puesto que

$$\log(1+z) = \int_0^1 \frac{z}{1+tz}\,dt,$$

es evidente la pertenencia de la citada función a la clase $\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{T}_+$. Para cada $\beta > 0$, la función

$$\sqrt{z}\operatorname{arc\,tg}(\beta\sqrt{z}) = \int_0^\beta \frac{z}{1+tz}\,\frac{1}{2\sqrt{z}}dt$$

también está en $\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{T}_+$.

3.2 Definición del Cálculo Funcional. Primeras propiedades.

Vamos a considerar como operadores base los elementos de $\mathcal{M}_0$ donde podemos definir $f(A)$ a partir del Cálculo de Dunford, como hace Alaarabiou en [Al1] para las funciones de $\mathcal{T}_+$.

Si $A \in \mathcal{M}_0$ y $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ entonces

$$(3.6) \qquad \begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_z\,f(z)\,dz \\ &= a + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_z\Big(\int_{\mathbb{R}_+}\frac{z}{1+tz}\,d\mu(t)\Big)\,dz, \end{aligned}$$

siendo Γ cualquier contorno que rodee a $\sigma(A)$ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (véanse [Ru], [HP] o [DS]). Consideremos la función

$$f(z,t) = \frac{z-1}{1+tz}, \quad (z,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+.$$

Si elegimos z_0, $z_1 \in \Gamma$ tales que $|z_0| = \text{mín}_{z\in\Gamma} |z| > 0$ y $|z_1| = \text{máx}_{z\in\Gamma} |z|$ entonces, por continuidad, $f(z,t)$ está acotada en $\Gamma \times [0, |z_0|^{-1} + 1]$, y como

$$|f(z,t)| \leq \frac{|z_1|+1}{|z_0|}, \quad \forall (z,t) \in \Gamma \times [|z_0|^{-1} + 1, \infty[,$$

podemos acotar la función $f(z,t)$ en $\Gamma \times \mathbb{R}_+$. Así, la función $\frac{(1+t)z}{1+tz}$ está acotada, y por el teorema de Fubini se concluye, a partir de (3.6), que

$$f(A) = a + \int_{\mathbb{R}_+} A_t \, d\mu(t), \tag{3.7}$$

donde la integral es convergente en $\mathcal{L}(X)$ y $A_0 = A$.

En realidad podríamos iniciar la construcción a partir del Cálculo obtenido por Martínez y Sanz en [MS2] para el caso particular de operadores acotados no negativos: si $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y el operador $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$, se define $f(A)$ mediante la fórmula (3.7). Como veremos más adelante, la extensión obtenida en ambos casos coincide; no obstante, con la presentación elegida conseguimos que el Cálculo Funcional sea autocontenido, aunque, como contrapartida, perdemos la posibilidad de extender la construcción a espacios vectoriales localmente convexos más generales.

Teorema 3.4 *Sean $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}_0$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *$f(A) \in \mathcal{L}(X)$ con*

$$\begin{aligned} \|f(A)\| \;\leq\; & |a| + \|A\| \, M(A) \, |\mu| \, ([0,1]) \\ & + (M(A)+1) \int_{]1,\infty[} \frac{2}{1+t} \, d\,|\mu|\,(t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

(ii) *Si $g(z) \in \mathcal{T}$ y $h(z) = f(z)\, g(z) \in \mathcal{T}$ entonces*

$$h(A) = f(A)\, g(A) = g(A)\, f(A).$$

(iii) *Si f no se anula y $\tilde{f}(z) \in \mathcal{T}$ entonces*

$$f(A)^{-1} = \tilde{f}(A^{-1}).$$

(iv) *Si $f(z) \in \mathcal{T}_+$ no se anula entonces $f(A) \in \mathcal{M}_0$ con*

$$J_\lambda^{f(A)} = 1 - \lambda f_\lambda(A), \quad \forall \lambda > 0,$$

y $M(f(A)) \leq M(A)$.

(v) *Si $g(z) \in \mathcal{T}_+$ no se anula entonces*

$$f(g(A)) = (f \circ g)(A).$$

(vi) $\sigma(f(A)) = \{f(z) : z \in \sigma(A)\}$.

(vii) $f(A) = \lim\limits_{\lambda \to 0} f(A_\lambda + \lambda)$ *en $\mathcal{L}(X)$.*

Demostración. El apartado (i) es inmediato y los apartados (ii), (iii) y (vi) son consecuencia del Cálculo Funcional holomorfo. Respecto del apartado (iv) tenemos que para cada $\lambda > 0$ la función $1 - \lambda f_\lambda(z) \in \mathcal{S}_0$, donde $f_\lambda(z) = f(z)/(1 + \lambda f(z)) = (a_\lambda, \mu_\lambda)(z^{-1})$, luego por la fórmula del producto (ii),

$$\begin{aligned} J_\lambda^{f(A)} &= 1 - \lambda f_\lambda(A) = \frac{1}{1 + \lambda a} - \lambda \int_{]0,\infty[} A_t \, d\mu_\lambda(t) \\ &= \frac{1}{1 + \lambda f(\infty)} + \lambda \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t} J_t^A \, d\mu_\lambda(t). \end{aligned}$$

Por tanto, al tomar normas en $\mathcal{L}(X)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| J_\lambda^{f(A)} \right\| &\leq \frac{1}{1 + \lambda f(\infty)} + \lambda M(A)(f_\lambda(\infty) - f_\lambda(0)) \\ &\leq \frac{1}{1 + \lambda a} M(A) \leq M(A). \end{aligned}$$

Además, por el apartado (iii) tenemos que $0 \in \rho(f(A))$. En definitiva, $f(A) \in \mathcal{M}_0$.

Ahora, el apartado (v) es consecuencia del Cálculo Funcional de Dunford.

Comprobemos finalmente que (vii) es cierto. Para $t > 0$ tenemos

$$(3.9)\qquad \begin{aligned}(A_\lambda+\lambda)_t-(A_\lambda)_t &= \frac{1}{t}(J_t^{A_\lambda}-\frac{1}{1+t\lambda}J^{A_\lambda}_{\frac{t}{1+t\lambda}})\\ &= J^{A_\lambda}_{\frac{t}{1+t\lambda}}\,J_t^{A_\lambda}\,\frac{\lambda}{1+t\lambda},\end{aligned}$$

siendo válida la igualdad obtenida incluso para $t = 0$, de donde, $\forall\lambda > 0$, se obtiene la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}\|f(A_\lambda+\lambda)-f(A)\| &\le \int_{\mathbb{R}_+}\|(A_\lambda+\lambda)_t-(A_\lambda)_t+(A_\lambda)_t-A_t\|\,d\,|\mu|\,(t)\\ &\le (M(A)+1)\left[(M(A)+1)\int_{\mathbb{R}_+}\frac{\lambda}{1+t\lambda}\,d\,|\mu|\,(t)\right.\\ &\quad +\lambda\,\|A\|\;M(A)\,[\,\|A\|\;M(A)\;|\mu|\,([0,1])\\ &\quad \left.+2\;(M(A)+1)\int_{]1,\infty[}\frac{1}{1+t}\,d\,|\mu|\,(t)\,]\right].\end{aligned}$$

Utilizando el teorema de convergencia dominada para el primer sumando del último miembro de la anterior cadena de desigualdades, se demuestra la afirmación (vii). ■

Nota 3.2 El apartado (iv) se podría obtener a partir del apartado (iii) ya que si consideramos la función $h(z) = (1+\lambda f(z)) \in \mathcal{T}_+$ entonces $\widetilde{h}\,(z) = (1+\lambda f(z^{-1}))^{-1} \in \mathcal{T}_+$, y por tanto,

$$J_\lambda^{f(A)} = \widetilde{h}\,(A^{-1}) = \frac{1}{1+\lambda f(\infty)} + \int_{]0,\infty[}\frac{1}{t}\,J^A_{\frac{1}{t}}\,d\,\widetilde{\mu}\,(t),$$

donde hemos supuesto que $\widetilde{h}\,(z) = ((1+\lambda f(\infty))^{-1},\widetilde{\mu})(z^{-1})$.

Del último apartado se deduce, vía la proposición 2.4, que $f(A) = \text{lím inf}_{\lambda\to 0} f(A_\lambda+\lambda)$, lo que sugiere la siguiente definición.

Definición 3.3 *Para $f(z) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$ definimos el operador $f(A)$ mediante:*

$$f(A) = \liminf_{\lambda\to 0} f(A_\lambda+\lambda).$$

Evidentemente se cumple la condición $f(zI) = f(z)\, I$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Para probar el teorema espectral enunciado en el teorema siguiente, utilizaremos una técnica muy utilizada en la literatura (véanse [Ba] y [DS]). Para ello, recordamos previamente algunos resultados sobre álgebras de Banach que podemos encontrar, por ejemplo, en [Ru] capítulos 10 y 11. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach compleja, no necesariamente conmutativa. Si $\mathcal{L}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$, se define el conmutador de $\mathcal{L}$ como el conjunto

$$\mathcal{L}^c = \{\, S \in \mathcal{A} : T\,S = S\,T,\ \forall T \in \mathcal{L}\},$$

y se verifican las siguientes afirmaciones:

a. $\mathcal{L}^c$ es un álgebra de Banach. Si $\mathcal{A}$ tiene elemento unidad, lo mismo le sucede a $\mathcal{L}^c$.

b. $\mathcal{L} \subseteq (\mathcal{L}^c)^c$. Si $\mathcal{L}$ es conmutativo entonces $(\mathcal{L}^c)^c$ también lo es.

c. $S \in \mathcal{L}^c$ es invertible entonces $S^{-1} \in \mathcal{L}^c$. Así, el espectro de cualquier elemento de $\mathcal{L}^c$ es indistinto considerarlo respecto de $\mathcal{L}^c$ o respecto de $\mathcal{A}$.

Si suponemos adicionalmente que $\mathcal{A}$ es un álgebra conmutativa con elemento unidad, se verifican las siguientes propiedades:

d. El conjunto $\mathcal{K}$ formado por las formas lineales sobre $\mathcal{A}$ multiplicativas y no idénticamente nulas es no vacío.

e. Toda forma lineal multiplicativa no idénticamente nula es continua.

f. $S \in \mathcal{A}$ es invertible si, y sólo si, $\varphi(S) \neq 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{K}$. Por tanto

$$\sigma(S) = \{\varphi(S) : \varphi \in \mathcal{K}\}.$$

Teorema 3.5 *Sean $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ *con* $f(A) = a + \int_{\mathbb{R}_+} A_t\, d\mu(t)$ *y se tiene la acotación* (3.8).

(ii) $f(A) = \lim_{\lambda \to 0} f(A_\lambda + \lambda)$ *en* $\mathcal{L}(X)$.

(iii) *Si* $g(z) \in \mathcal{T}$ *y* $h(z) = f(z)\, g(z) \in \mathcal{T}$ *entonces*

$$h(A) = f(A)\, g(A) = g(A)\, f(A).$$

(iv) *Si* $f(z) \in \mathcal{T}_+$ *entonces* $f(A) \in \mathcal{M}$ *con*

$$J_\lambda^{f(A)} = 1 - \lambda f_\lambda(A), \quad \forall \lambda > 0,$$

y $M(f(A)) \leq M(A)$.

(v) *Si* $g(z) \in \mathcal{T}_+$ *entonces*

$$f(g(A)) = (f \circ g)(A).$$

(vi) $\sigma(f(A)) = \{f(z) : z \in \sigma(A)\}$.

(vii) $f(A^*) = f(A)^*$.

(viii) $\forall g(z) \in \mathcal{T}$ *se tiene*

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A).$$

Demostración. (i) Por la acotación (3.8) tenemos que $\liminf_{\lambda \to 0} f(A_\lambda + \lambda)$ es un operador univaluado. Sea $u \in X$; como

$$\begin{aligned} \|(A_\lambda + \lambda)_t\| \;\leq\; & (\|A\|\, M(A) + \lambda)\, (M(A) + 1)\, \mathcal{X}_{[0,1]} \\ & + (M(A) + 2)\, \frac{2}{1+t}\, \mathcal{X}_{]1,\infty[}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{X}$ representa la función característica del conjunto indicado, y

$$\lim_{\lambda \to 0} (A_\lambda + \lambda)_t u = A_t u, \quad \forall t \geq 0,$$

por convergencia dominada se sigue que

$$\liminf_{\lambda \to 0} f(A_\lambda + \lambda) u = au + \int_{\mathbb{R}_+} A_t u \; d\mu(t).$$

Ahora la demostración de que $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ y la acotación (3.8) es ya rutinaria.

(ii) La demostración del teorema 3.4 se puede reproducir teniendo en cuenta (i).

(iii) Por la fórmula del producto para los operadores de $\mathcal{M}_0$

$$h(A_\lambda + \lambda) = f(A_\lambda + \lambda)\, g(A_\lambda + \lambda) = g(A_\lambda + \lambda)\, f(A_\lambda + \lambda), \quad \forall \lambda > 0,$$

de donde, por el apartado previo, se deduce el resultado deseado.

(iv) Razonar como en el teorema 3.4 a partir de la fórmula del producto.

(v) Observar que por (iv) el primer término de la igualdad tiene sentido. Sabemos que

$$f(g(A_\lambda + \lambda)) = (f \circ g)(A_\lambda + \lambda), \quad \forall \lambda > 0.$$

Sea $u \in X$; es fácil convencerse de que

$$\lim_{\lambda \to 0} g(A_\lambda + \lambda)_t u = g(A)_t u, \quad \forall \lambda > 0,$$

lo que junto con la acotación

$$\|g(A_\lambda + \lambda)_t\| \leq \|g(A_\lambda + \lambda)\|\, (M(A) + 1)\mathcal{X}_{[0,1]} + (M(A) + 2)\, \frac{2}{1+t}\, \mathcal{X}_{]1,\infty[},$$

permite, por medio del teorema de convergencia dominada, concluir

$$\lim_{\lambda \to 0} f(g(A_\lambda + \lambda))u = f(g(A))u,$$

y por tanto, como

$$\lim_{\lambda \to 0} (f \circ g)(A_\lambda + \lambda)u = (f \circ g)(A)u,$$

ambos operadores coinciden.

(vi) Consideremos el subconjunto conmutativo (por la identidad resolvente)

$$\mathcal{L} = \{A_\lambda : \lambda > 0\}$$

del álgebra de Banach compleja, unitaria y no conmutativa en general, $\mathcal{L}(X)$, y su biconmutador $\mathcal{A} = (\mathcal{L}^c)^c$, que es una subálgebra conmutativa y unitaria de $\mathcal{L}(X)$. Por $\mathcal{K}$ denotaremos el conjunto de las formas lineales no idénticamente nulas y multiplicativas sobre $\mathcal{A}$. Sabemos que

$$\sigma(A_\lambda) = \{\varphi(A_\lambda) : \varphi \in \mathcal{K}\}$$

y por la proposición 2.7

$$\sigma(A_\lambda) = \{\frac{z}{1+\lambda z} : z \in \sigma(A)\},$$

con lo que tenemos perfectamente determinada $\varphi(A_\lambda)$ para $\varphi \in \mathcal{K}$.

Por la expresión de $f(A)$ y teniendo en cuenta que la integral es convergente en $\mathcal{L}(X)$ entonces $f(A) \in (\mathcal{L}^c)^c$; en consecuencia

$$\begin{aligned}
\sigma(f(A)) &= \{\varphi(f(A)) : \varphi \in \mathcal{K}\} = \{a + \varphi(\int_{\mathbb{R}_+} A_t \, d\mu(t)) : \varphi \in \mathcal{K}\} \\
&= \{a + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z}{1+\lambda z} \, d\mu(t) : z \in \sigma(A)\} = \{f(z) : z \in \sigma(A)\},
\end{aligned}$$

siendo válida la penúltima igualdad por el hecho de que las formas lineales, al ser continuas, conmutan con la integral si $\varphi(A_t)$ es $\mu(t)$-integrable, lo que sucede para todas las $\varphi \in \mathcal{K}$.

(vii) Para todo $u^* \in X^*$ y $u \in X$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle f(A)^* u^*, u\rangle &= \left\langle u^*, a\,u + \int_{\mathbb{R}_+} A_t u \, d\mu(t)\right\rangle \\
&= a\,\langle u^*, u\rangle + \int_{\mathbb{R}_+} \langle (A^*)_t \, u^*, u\,\rangle \; d\mu(t) \\
&= \left\langle a\,u^* + \int_{\mathbb{R}_+} (A^*)_t \, u^* \; d\mu(t),\, u\right\rangle,
\end{aligned}$$

siendo la última igualdad consecuencia de que $A^* \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$. Por tanto, se da la relación apuntada.

(viii) Es evidente a partir del primer apartado. ∎

Nota 3.3 Para $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ se tiene también que $f(A) = \lim_{\lambda \to 0} f(A + \lambda)$ en $\mathcal{L}(X)$ puesto que

$$\|f(A+\lambda) - f(A)\| \le M(A)^2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda}{1+\lambda t} \, d\,|\mu|\,(t).$$

No obstante, es obvio que no podemos utilizar la igualdad probada como definición para el caso general. El siguiente resultado si proporciona una definición válida en términos del concepto ya introducido para operadores de la clase $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$.

Proposición 3.3 *Sean* $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ *y* $A \in \mathcal{M}$. *Se tiene:*

$$f(A) = \liminf_{\lambda \to 0} f(A_\lambda) = a + \int_{]1,\infty[} A_t \, d\mu(t) + \liminf_{\lambda \to 0} \int_{[0,1]} A_{\lambda+t} \, d\mu(t).$$

Demostración. La primera igualdad es consecuencia de la cadena de igualdades (3.9) ya que entonces

$$\int_{\mathbb{R}_+} \|(A_\lambda + \lambda)_t - (A_\lambda)_t\| \, d|\mu|(t) \leq (M(A)+1)^2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda}{1+\lambda t} \, d|\mu|(t),$$

y por convergencia dominada la última integral converge a cero cuando $\lambda \to 0$, de donde es ya inmediato comprobar que

$$f(A) = \liminf_{\lambda \to 0} f(A_\lambda + \lambda) = \liminf_{\lambda \to 0} f(A_\lambda).$$

La segunda identidad se obtiene fácilmente de la definición de límite inferior. ■

Para $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$ construimos el operador lineal $W_f(A)$ definido mediante $D(W_f(A)) = D(A)$ y

$$W_f(A)u = au + \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu(t) + \mu(0)\, Au, \quad \forall u \in D(A).$$

Obsérvese que si $\mu(\{0\}) \neq 0$ entonces $W_f(A)$ es multivaluado si, y sólo si, lo es A, ya que en dicho caso $W_f(A)0 = A0$. Si $\mu(\{0\}) = 0$ entonces $W_f(A)$ es univaluado independientemente de que lo sea o no A. Nótese que el operador, multivaluado si, y sólo si, lo es A,

$$a + \int_{]1,\infty[} A_t \, d\mu(t) + A \int_{[0,1]} J_t^A \, d\mu(t) =: S + AT,$$

con S y T en $\mathcal{L}(X)$, proporciona una extensión cerrada de $W_f(A)$.

Proposición 3.4 *Sean $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) *Para todo $z \in \rho(A)$ se tiene:*

$$f(A)\,R_z u = R_z\, f(A)u + f(A)0, \quad \forall u \in D(f(A)).$$

(ii) $f(A)0 \subseteq A0$. *En particular si A es univaluado entonces $f(A)$ es univaluado.*

(iii) $W_f(A) \subseteq f(A) \subseteq S + AT$.

(iv) *Si $\mu(\{0\}) \neq 0$ y además $\frac{1}{t}$ es $|\mu|\,(t)$-integrable en $]0,\infty[$, entonces $f(A) = W_f(A)$.*

Demostración. (i) Sea $(u,v) \in f(A)$. Existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ en X tal que

$$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to 0} f(A_\lambda)u_\lambda = v,$$

luego

$$\lim_{\lambda\to 0} R_z u_\lambda = R_z u \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to 0} R_z\, f(A_\lambda)u_\lambda = R_z v,$$

y como

$$f(A_\lambda)R_z u = R_z f(A_\lambda)u, \quad \forall u \in X,$$

por ser R_z acotado y conmutar con $A_{\lambda+t}$, se obtiene:

$$(R_z u, R_z v) \in \liminf_{\lambda\to 0} f(A_\lambda) = f(A).$$

(ii) Sea $v \in f(A)0$. Entonces existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ en X de forma que

$$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to 0} \int_{\mathbb{R}_+} (A_\lambda)_t\, u_\lambda\, d\mu(t) = v.$$

Por tanto

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_{\mathbb{R}_+} (1+A)^{-1}(A_\lambda)_t\, u_\lambda\, d\mu(t) = (1+A)^{-1}v.$$

Para todo $u \in X$ se tiene que $A_{\lambda+t}u \in AJ^A_{\lambda+t}u$, lo que se traduce en:

$$(1+A)^{-1}(A_\lambda)_t = (1-(1+A)^{-1})J^A_{\lambda+t}.$$

Por ello, tenemos que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} (1+A)^{-1}(A_\lambda)_t \, u_\lambda \, d\mu(t) \right\| \leq M(A)(M(A)+1) \, \|u_\lambda\| \left[\mu([0,1]) + \int_{]1,\infty[} \frac{1}{t} \, d\,|\mu|\,(t) \right],$$

luego $(1+A)^{-1}v = 0$, es decir, $v \in A0$.

(iii) Sea $(u,w) \in W_f(A)$. Existe $v \in Au$ tal que

$$w = au + \int_{]0,\infty[} J_t^A v \, d\mu(t) + \mu(\{0\})v.$$

Como observamos en la nota 2.2

$$\lim_{\lambda \to 0} J_1^{A_\lambda}(u+v) = u \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda \to 0} A_{\lambda+1}(u+v) = v.$$

Para todo $t \in]0,1]$ tenemos que

$$\left\| A_{\lambda+t} \, J_1^{A_\lambda}(u+v) \right\| = \left\| J_t^{A_\lambda} A_{\lambda+1}(u+v) \right\| \leq (M(A)+1)^2 \, \|u+v\|$$

y

$$\lim_{\lambda \to 0} A_{\lambda+t} \, J_1^{A_\lambda}(u+v) = J_t^A v,$$

ya que

$$\left\| A_{\lambda+t} \, J_1^{A_\lambda}(u+v) - J_t^A v \right\| \leq \|A_{\lambda+t}\| \left\| J_1^{A_\lambda}(u+v) - u \right\| + \left\| A_{\lambda+t} \, u - J_t^A v \right\|.$$

Así, por convergencia dominada,

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{]0,1]} A_{\lambda+t} \, J_1^{A_\lambda}(u+v) \, d\mu(t) = \int_{]0,1]} J_t^A v \, d\mu(t),$$

luego

$$\int_{]0,1]} J_t^A v \, d\mu(t) + \mu(\{0\})v \in \liminf_{\lambda \to 0} \int_{[0,1]} A_{\lambda+t} \, d\mu(t),$$

y en consecuencia $(u,w) \in f(A)$.

Para probar la otra inclusión comencemos demostrando que si $\mu(\{0\}) \neq 0$ entonces

$$f(A) \cap (D(A) \times \overline{D(A)}) = W_f(A_D),$$

mientras que si $\mu(\{0\}) = 0$ entonces

$$f(A) \cap (D(A) \times \overline{D(A)}) = W_f(A).$$

Para comprobar la primera afirmación consideremos $u \in D(A)$; por la inclusión probada si $w \in f(A)u \cap \overline{D(A)}$ entonces existe $v \in Au$ tal que

$$w = au + \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu(t) + \mu(\{0\})v$$

y por tanto $v \in Au \cap \overline{D(A)}$, lo que implica que $u \in D(A_D)$ y que

$$w = au + \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu(t) + \mu(\{0\}) \, A_D u.$$

La inclusión restante es inmediata así como la segunda afirmación.

En definitiva, si $(u, v) \in f(A)$ entonces por (i)

$$(J_1^A u, J_1^A v) \in f(A) \cap (D(A) \times \overline{D(A)}),$$

lo que conduce fácilmente a la inclusión buscada si $\mu(\{0\}) = 0$. En otro caso, por el comentario previo, $J_1^A u \in D(A_D)$ y existirá $w \in A0$ con

$$J_1^A v = a \, J_1^A u + \int_{]0,\infty[} A_t \, J_1^A u \, d\mu(t) + \mu(\{0\})(A_1 u + w),$$

luego

$$A_1 \int_{[0,1]} J_t^A u \, d\mu(t) + \mu(\{0\})w \in D(A),$$

de donde

$$\int_{[0,1]} J_t^A u \, d\mu(t) + \mu(\{0\})w \in D(A),$$

con lo que $w \in \overline{D(A)} \cap A0 = \{0\}$. Por consiguiente, $(u, v) \in AT + S$.

(iv) Sea ahora $(u, v) \in f(A)$ y asumamos las hipótesis adicionales del enunciado. Por definición existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ en X de modo que

$$\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda = u \quad \text{y}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} f(A_\lambda)u_\lambda = \lim_{\lambda \to 0} \left(a \, u_\lambda + \int_{]0,\infty[} A_{\lambda+t} \, u_\lambda \, d\mu(t) + \mu(\{0\}) \, A_\lambda u_\lambda\right) = v.$$

Por convergencia dominada se tiene

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{]0,\infty[} A_{\lambda+t}\, u_\lambda \, d\mu(t) = \int_{]0,\infty[} A_t\, u \, d\mu(t),$$

y por tanto,

$$\lim_{\lambda\to 0} \mu(\{0\})\, A_\lambda u_\lambda = v - a\, u - \int_{]0,\infty[} A_t\, u\, d\mu(t),$$

de donde, al tener que $A = \liminf_{\lambda\to 0} A_\lambda$, se obtiene que $(u,v) \in W_f(A)$. ■

Nota 3.4 Del apartado (iii) anterior se deduce en particular que

$$D(A) \subseteq D(f(A)) \subseteq \{u \in X : \int_{[0,1]} J_t^A u\, d\mu(t) \in D(A)\},$$

lo que en el caso de que $\mu(\{0\}) \neq 0$ conduce a que $D(f(A)) \subseteq \overline{D(A)}$.

De los resultados anteriores se desprende también que si $\mu(\{0\}) \neq 0$ entonces $A0 = f(A)0$, y en las condiciones del apartado (iv) tenemos además que $f(A)$ es cerrado por ser suma de un acotado con un cerrado.

Proposición 3.5 *Sean $f(z) = (a,\mu)(z) \in \mathcal{S}_0$ y $A \in \mathcal{M}$. Entonces:*

(i) *$f(A) \in \mathcal{L}(X)$ con*

$$f(A) = a + \int_{]0,\infty[} (t+A)^{-1}\, d\mu(t).$$

(ii) *$\forall g \in \mathcal{T}$ se tiene*

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A).$$

(iii) *Sea $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una red en $\mathcal{M}$ tal que*

$$A = \liminf A_i \quad y \quad \limsup M(A_i) < \infty. \tag{3.10}$$

Entonces

$$f(A) = \liminf f(A_i).$$

Demostración. (i) Sabemos, a partir de la prueba de la inclusión $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{T}$ en la sección 3.1, que

$$f(A_\lambda) = a + \int_{]0,\infty[} (t + A_\lambda)^{-1}\, d\mu(t)$$

y que

$$\|f(A_\lambda)\| \leq |a| + (M(A)+1) \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\,|\mu|\,(t)), \tag{3.11}$$

luego $f(A)$ es un operador univaluado. Sea $u \in X$; como $\forall t > 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} (t + A_\lambda)^{-1}u = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{t}\, J^{A_\lambda}_{\frac{1}{t}} u = \frac{1}{t}\, J^{A}_{\frac{1}{t}} u$$

y

$$\left\| \frac{1}{t}\, J^{A_\lambda}_{\frac{1}{t}} \right\| \leq (M(A)+1)\, \frac{1}{t},$$

entonces, por convergencia dominada,

$$\lim_{\lambda\to 0} f(A_\lambda)u = a\,u + \int_{]0,\infty[} (t + A)^{-1} u\, d\mu(t),$$

de donde se deduce la afirmación enunciada.

(ii) Basta tener en cuenta que $(f+g)(A_\lambda) = f(A_\lambda) + g(A_\lambda)$, y que para toda red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ con $\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u$ se tiene que $\lim_{\lambda\to 0} f(A_\lambda)u_\lambda = f(A)u$ por la acotación (3.11), uniforme respecto de λ.

(iii) Razonar de forma análoga a como se ha hecho en el primer apartado. ∎

Como vamos a ver a continuación, la propiedad de "continuidad" probada en el apartado (iii) permanece válida en la clase $\mathcal{T}_+$. Precisamente, este hecho y la estabilidad son los que utiliza Alaarabiou en [Al1] para construir su Cálculo Simbólico asociado a la citada clase de funciones.

Teorema 3.6 *Sean $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_+$ y $A \in \mathcal{M}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *$f(A) \in \mathcal{M}$ con $J^{f(A)}_\lambda = 1 - \lambda f_\lambda(A)$, $\forall \lambda > 0$, y $M(f(A)) \leq M(A)$.*

(ii) *Sea $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una red en $\mathcal{M}$ verificando (3.10). Entonces*

$$f(A) = \liminf f(A_i).$$

Demostración. (i) Sea $\rho > 0$. Por la proposición 3.3 tenemos $f(A) = \liminf_{\lambda\to 0} f(A_\lambda)$ luego

$$(I + \rho f(A))^{-1} = \liminf_{\lambda\to 0} J_\rho^{f(A_\lambda)}.$$

Como tenemos $\left\| J_\rho^{f(A_\lambda)} \right\| \leq M(A) + 1$ entonces el operador $(I + \rho f(A))^{-1}$ es univaluado. Además, por convergencia dominada se tiene: $\forall u \in X$,

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\rho^{f(A_\lambda)} u = \frac{u}{1 + \rho a} - \rho \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu_\rho(t),$$

luego

$$J_\rho^{f(A)} = \frac{1}{1 + \rho a} - \rho \int_{]0,\infty[} A_t \, d\mu_\rho(t) \in \mathcal{L}(X),$$

de donde $f(A) \in \mathcal{M}$, con la relación ya habitual entre $M(f(A))$ y $M(A)$.

(ii) Sea $(\lambda, u) \in]0,\infty[\times X$; se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| J_\lambda^{f(A_i)} u - J_\lambda^{f(A)} u \right\| &\leq \lambda \int_{]0,\infty[} \|(A_i)_t u - A_t u\| \, d\mu_\lambda(t) \\ &= \lambda \int_{]0,\infty[} \left\| J_t^{A_i} u - J_t^{A} u \right\| \frac{1}{t} \, d\mu_\lambda(t), \end{aligned}$$

donde el último término tiende a cero siguiendo $\mathcal{I}$ puesto que $\int_{]0,\infty[} \frac{1}{t} \, d\mu_\lambda(t) < \infty$ y $\limsup M(A_i) < \infty$, luego por el corolario 2.1 se obtiene el resultado deseado. ∎

Es evidente que en general $f(A)$ puede no ser no negativo. Pensar por ejemplo que $A \in \mathcal{M}$ no implica que $-A \in \mathcal{M}$. El siguiente teorema se debe a Alaarabiou y establece lo que podríamos calificar como "continuidad" del Cálculo Funcional.

Teorema 3.7 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_+$ de modo que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \quad \forall z \in [0,\infty].$$

Entonces

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(A) = f(A).$$

Demostración. Recuérdese que $f(z) \in \mathcal{T}_+$ por ser límite puntual en $]0,\infty[$ de funciones de $\mathcal{T}_+$. Sean $\mu_{n\lambda}$ y μ_λ las medidas asociadas a $f_{n\lambda}(z) =$

$f_n(z)/(1+\lambda f_n(z))$ y $f_\lambda(z) = f(z)/(1+\lambda f(z))$ respectivamente. Obsérvese que $f_{n\lambda}(z)$ converge puntualmente a $f_\lambda(z)$ en $[0,\infty]$. Por el corolario 2.1 para demostrar la tesis basta comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} J_\lambda^{f_n(A)}u = J_\lambda^{f(A)}u, \quad \forall u \in X,\ \forall \lambda > 0.$$

En primer lugar, por el teorema 3.6, tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} M(f_n(A)) \le M(A)$$

y

$$J_\lambda^{f_n(A)}u = \frac{1}{1+\lambda f_n(0)}\,u - \lambda \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu_{n\lambda}(t),$$
$$J_\lambda^{f(A)}u = \frac{1}{1+\lambda f(0)}\,u - \lambda \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu_{\lambda}(t),$$

luego sólo resta demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu_{n\lambda}(t) = \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu_{\lambda}(t).$$

Para ello es suficiente con comprobar que las medidas finitas $\frac{1}{t}\,\mu_{n\lambda}(t)$ convergen estrechamente a la medida finita $\frac{1}{t}\,\mu_\lambda(t)$ en $C_b(]0,\infty[;\mathbb{R})$ y aplicar el lema siguiente. Para simplificar la notación vamos a denotar las anteriores medidas mediante ν_n y ν respectivamente. Por la hipótesis tenemos que $\lim_{n\to\infty}\nu_n(]0,\infty[) = \nu(]0,\infty[)$.

Como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{]0,\infty[}\frac{1}{z+t}\,d\nu_n(t) &= \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n\lambda}(\infty)-f_{n\lambda}(z^{-1})}{z} = \frac{f_\lambda(\infty)-f_\lambda(z^{-1})}{z} \\ &= \int_{]0,\infty[}\frac{1}{z+t}\,d\nu(t), \quad \forall z > 0,\end{aligned}$$

entonces, $\forall \varphi \in C_0([0,\infty[;\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{]0,\infty[}\varphi(t)\ d\nu_n(t) = \int_{]0,\infty[}\varphi(t)\ d\nu(t), \tag{3.12}$$

puesto que por el teorema de Stone-Weierstrass el álgebra engendrada por el subespacio vectorial generado por $\{\ \frac{1}{z+t}\ :\ z > 0\}$ es densa en

$C_0([0,\infty[;\mathbb{R})$. Ahora ya es sencillo mostrar que la convergencia expresada en (3.12) es válida en $C_0(]0,\infty[;\mathbb{R})$, ya que toda función de este espacio se puede extender a 0 dándole el valor 0 y la extensión está en $C_0([0,\infty[;\mathbb{R})$.

Sean $\psi \in C_b(]0,\infty[;\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$. Tomamos $\varphi \in C_c(]0,\infty[;[0,1])$ de forma que

$$\nu(]0,\infty[) - \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\, d\nu(t) < \epsilon.$$

Evidentemente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\nu_n(]0,\infty[) - \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\, d\nu_n(t) < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Así

$$\left|\int_{]0,\infty[} \psi(t)\, d\nu_n(t) - \int_{]0,\infty[} \psi(t)\, d\nu(t)\right| \leq 2\,\epsilon\,\|\psi\|_\infty$$
$$+\left|\int_{]0,\infty[} \varphi(t)\psi(t)\, d\nu_n(t) - \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\psi(t)\, d\nu(t)\right|,$$

de donde, por la arbitrariedad de ϵ, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \psi(t)\, d\nu_n(t) = \int_{]0,\infty[} \psi(t)\, d\nu(t).$$

■

Lema 3.2 *Sea X un espacio de Banach. Sean $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y μ medidas de Borel sobre $]0,\infty[$ no negativas y finitas, de forma que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \psi(t)\, d\mu_n(t) = \int_{]0,\infty[} \psi(t)\, d\mu(t), \quad \forall \psi \in C_b(]0,\infty[;\mathbb{R}).$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \psi(t)\, d\mu_n(t) = \int_{]0,\infty[} \psi(t)\, d\mu(t), \quad \forall \psi \in C_b(]0,\infty[;X).$$

Demostración. Comenzamos probando que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(]0,z]) = \mu(]0,z])$ c.p.p. en $]0,\infty[$ respecto de la medida de Lebesgue. La función $\mu(]0,z])$ es monótona creciente, luego el conjunto de puntos donde es discontinua es numerable, y por tanto, tiene medida de Lebesgue nula. Sea $z \in]0, \infty[$ donde $\mu(]0, z])$ es continua. Sea $\epsilon > 0$. Construimos la función

$$\psi_\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq z \\ \frac{z+\epsilon-t}{\epsilon}, & z \leq t \leq z+\epsilon \\ 0, & z+\epsilon \leq t \end{cases}$$

Claramente

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(]0, z]) \leq \int_{]0,\infty[} \psi_\epsilon(t)\ d\mu(t) \leq \mu(]0, z+\epsilon]).$$

Tomando límites cuando $\epsilon \to 0$ en la anterior relación se tiene

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(]0, z]) \leq \mu(]0, z]).$$

Análogamente se prueba

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(]0, z]) \geq \mu(]0, z]),$$

y en definitiva tenemos que $\lim_{n\to\infty} \mu_n(]0, z]) = \mu(]0, z])$.

Sea $\forall \varphi \in C_c^1(]0, \infty[; X)$ y supongamos que soporte de φ está contenido en $[a, b] \subseteq]0, \infty[$. Por el teorema de Fubini se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\ d\mu(t) &= -\int_{[a,b]} [\int_t^b \varphi'(s)\, ds]\, d\mu(t) = -\int_a^b [\int_{[a,s]} d\mu(t)]\, \varphi'(s)\, ds \\ &= -\int_0^\infty \mu(]0, s])\, \varphi'(s)\, ds. \end{aligned}$$

Esta integración por partes es también válida para las μ_n por lo que tomando límites, teniendo en cuenta que al estar la sucesión $\{\mu_n(]0, z])\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente acotada podemos utilizar convergencia dominada, se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\ d\mu_n(t) = \int_{]0,\infty[} \varphi(t)\ d\mu(t).$$

Como $C_c^1(]0, \infty[; X)$ es denso en $C_c(]0, \infty[; X)$ para la topología de la convergencia uniforme, se comprueba sin dificultad que la anterior convergencia se puede extender a este último espacio. Para finalizar basta con razonar como se ha hecho en el teorema anterior. ■

Nota 3.5 Si en el teorema anterior suponemos que $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(A) = f(A)$ en $\mathcal{L}(X)$. En efecto, basta tener en cuenta que

$$f(A) = a + \int_{[0,\infty[} (1+t)\, A_t \,\frac{1}{1+t}\, d\mu(t),$$

con una relación análoga para $f_n(A)$, $(1+t)\, A_t \in C_b([0,\infty[; \mathcal{L}(X))$ y que las medidas finitas $\frac{1}{1+t}\, d\mu_n(t)$ convergen estrechamente a la medida finita $\frac{1}{1+t}\, d\mu(t)$ en $C_b([0,\infty[; \mathbb{R})$, y razonar de forma análoga a como se ha hecho en el lema anterior.

El resultado siguiente relaciona $f(A)^{-1}$ con $\tilde{f}(A^{-1})$, lo que junto con una proposición que veremos en la próxima sección que conecta $f(A+\epsilon)$ con $f(A)$, para $\epsilon > 0$, nos permitirá utilizar las propiedades del Cálculo Funcional para los operadores de $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ y extenderlas, en la medida de lo posible, al caso multivaluado.

Teorema 3.8 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ que no se anula y de forma que $\tilde{f}(z) \in \mathcal{T}$. Entonces*

$$f(A)^{-1} = \tilde{f}(A^{-1}).$$

Demostración. Para todo $\lambda > 0$ se tiene que $A_\lambda + \lambda \in \mathcal{M}_0$ luego por el teorema 3.4 tenemos

$$f(A_\lambda + \lambda)^{-1} = \tilde{f}((A_\lambda + \lambda)^{-1}).$$

Como $\liminf_{\lambda\to 0} f(A_\lambda + \lambda)^{-1} = f(A)^{-1}$ el resultado queda probado si comprobamos que $\liminf_{\lambda\to 0} f((A_\lambda + \lambda)^{-1}) = f(A^{-1})$, $\forall f(z) \in \mathcal{T}$. Para $t > 0$ tenemos:

$$((A_\lambda + \lambda)^{-1})_t = \frac{1}{t}\, J_{\frac{1}{t}}^{A_\lambda + \lambda} = \frac{1}{t+\lambda}\, J_{\frac{1}{t+\lambda}}^{A_\lambda} = \frac{1}{t+\lambda}(1 - \frac{1}{t+\lambda}\, A_{\lambda + \frac{1}{t+\lambda}}),$$

siendo también válida la igualdad obtenida para $t = 0$, lo que junto con la identidad resolvente nos conduce a

$$((A_\lambda + \lambda)^{-1})_t - (A^{-1})_{\lambda+t} = \frac{1}{(\lambda+t)^2}\,(A_{\frac{1}{t+\lambda}} - A_{\lambda+\frac{1}{t+\lambda}}) = \frac{\lambda}{(\lambda+t)^2}\, A_{\lambda+\frac{1}{t+\lambda}}\, A_{\frac{1}{t+\lambda}}.$$

En consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left\| ((A_\lambda + \lambda)^{-1})_t - (A^{-1})_{\lambda+t} \right\| d\,|\mu|\,(t)$$

$$\leq (M(A)+1)^2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\lambda}{1+\lambda(t+\lambda)}\, d\,|\mu|\,(t),$$

y por convergencia dominada la última integral converge a cero cuando $\lambda \to 0$. De este hecho se concluye que

$$\liminf_{\lambda\to 0} f((A_\lambda+\lambda)^{-1}) = \liminf_{\lambda\to 0} f((A^{-1})_\lambda) = f(A^{-1}).$$

■

Nota 3.6 Podríamos probar a partir del resultado anterior que se conserva el signo, es decir, si $f \in \mathcal{T}_+$ entonces $f(A) \in \mathcal{M}$.

Corolario 3.1 *Sean* $A \in \mathcal{M}$ *y* $f(z) \in \mathcal{T}$ *que no se anula con* $\widetilde{f}(z) \in \mathcal{T}$. *Entonces:*

(i) Ker $f(A) \subseteq$ Ker A. *En particular si* A *es inyectivo entonces* $f(A)$ *es inyectivo.*

(ii) $R(A) \subseteq R(f(A)) \subseteq \{u \in X : \int_{[0,1]} J_t^{A^{-1}} u \, d\widetilde{\mu}(t) \in R(A)\}$.

(iii) *Si* $\lim_{\substack{z\to 0\\(z>0)}} \frac{z}{f(z)} \neq 0$ *entonces* $R(f(A)) \subseteq \overline{R(A)}$ *y* Ker $f(A) =$ Ker A.

Demostración. Considerar los resultados de la proposición 3.4 para A^{-1} y $\widetilde{f}$, teniendo en cuenta la igualdad del teorema anterior y que la condición $\lim_{z\to 0(z>0)} \frac{z}{f(z)} \neq 0$ es otra forma de decir que $\widetilde{\mu}(\{0\}) \neq 0$. ■

3.3 Fórmula de diagonalización.

En esta sección comprobaremos que nuestra definición es una extensión de la conocida para el caso univaluado. Se establece también una expresión de $f(A)$, para $f \in \mathcal{T}_0$, que relaciona el caso multivaluado con el caso densamente definido.

Proposición 3.6 *Sean* $A \in \mathcal{M}$ *y* $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$. *Entonces* $\forall \epsilon > 0$ *existe un operador* $F_\epsilon \in \mathcal{L}(X)$ *con* $\lim_{\epsilon\to 0} \|F_\epsilon\| = 0$ *de modo que*

$$f(A+\epsilon) = f(A) + F_\epsilon.$$

En particular $D(f(A)) = D(f(A+\epsilon))$. *Además,*

$$\overline{f(A)} = \liminf_{\epsilon\to 0} f(A+\epsilon).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fijo . Para $t \geq 0$ y $\lambda > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}(A+\epsilon)_{\lambda+t} - A_{\lambda+t} &= \frac{1}{\lambda+t}\,(J^A_{\lambda+t} - \frac{1}{1+\epsilon(\lambda+t)}\, J^A_{\frac{\lambda+t}{1+\epsilon(\lambda+t)}}) \\ &= \frac{\epsilon}{1+\epsilon(\lambda+t)}\, J^A_{\lambda+t}\, J^A_{\frac{\lambda+t}{1+\epsilon(\lambda+t)}}.\end{aligned}$$

Por ello, si definimos

$$S_{\lambda,\epsilon} = \int_{]0,1]} ((A+\epsilon)_{\lambda+t} - A_{\lambda+t})\, d\mu(t),$$

se tiene que $S_{\lambda,\epsilon} \in \mathcal{L}(X)$ con

$$\|S_{\lambda,\epsilon}\| \leq M(A)^2 \int_{]0,1]} \frac{\epsilon}{1+\epsilon t}\, d\,|\mu|\,(t).$$

Por convergencia dominada, teniendo en cuenta la acotación uniforme anterior, llegamos a que

$$S_\epsilon := \liminf_{\lambda\to 0} S_{\lambda,\epsilon} = \int_{]0,1]} \frac{\epsilon}{1+\epsilon t}\, J^A_t\, J^A_{\frac{t}{1+\epsilon t}}\, d\mu(t) \in \mathcal{L}(X).$$

Para concluir la primera afirmación basta con mostrar que

$$\liminf_{\lambda\to 0}\ (\mu(\{0\})\, \frac{\epsilon}{1+\epsilon\lambda}\, J^A_\lambda\, J^A_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}} + S_{\lambda,\epsilon} + \int_{]0,1]} A_{\lambda+t}\, d\mu(t))$$

$$= \epsilon\, \mu(\{0\}) + S_\epsilon + \liminf_{\lambda\to 0} \int_{]0,1]} A_{\lambda+t}\, d\mu(t),$$

lo que es sencillo en el caso de $\mu(\{0\})=0$. En otro caso tenemos (nota 3.4) que $D(f(A+\epsilon))$, $D(f(A))\subseteq \overline{D(A)}$; como para toda red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ con

$$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u \in \overline{D(A)}$$

se tiene

$$\left\| J_\lambda^A\, J_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}}^A u_\lambda - u\right\| \leq M(A)^2\, \|u_\lambda - u\| + M(A)\left\| J_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}}^A u - u\right\| + \left\| J_\lambda^A\, u - u\right\|,$$

podemos afirmar que

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda^A\, J_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}}^A u_\lambda = u,$$

con lo que se obtiene sin dificultad el resultado deseado.

En resumidas cuentas, $f(A+\epsilon)=f(A)+F_\epsilon$, donde

$$F_\epsilon = \int_{[0,\infty[} \frac{\epsilon}{1+\epsilon\, t}\, J_t^A\, J_{\frac{t}{1+\epsilon t}}^A\, d\mu(t) \in \mathcal{L}(X).$$

Como

$$\|F_\epsilon\| \leq M(A)^2 \int_{[0,\infty[} \frac{\epsilon}{1+\epsilon\lambda}\, d\,|\mu|\,(t),$$

entonces, por convergencia dominada, $\lim_{\epsilon\to 0}\|F_\epsilon\|=0$.

Por lo que acabamos de demostrar tenemos

$$f(A)\subseteq \liminf_{\epsilon\to 0} f(A+\epsilon).$$

Sea $(u,v)\in \lim\inf_{\epsilon\to 0} f(A+\epsilon)$; entonces existe $(u_\epsilon, v_\epsilon)\in f(A+\epsilon)$ de modo que $\lim_{\epsilon\to 0}(u_\epsilon,v_\epsilon)=(u,v)$. Por lo ya probado se tiene que existe $(u_\epsilon, w_\epsilon)\in f(A)$, $\forall\epsilon>0$, de forma que

$$v_\epsilon = w_\epsilon + F_\epsilon u_\epsilon,$$

y como $\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon u_\epsilon = 0$ entonces $(u,v)\in \overline{f(A)}$. ■

Corolario 3.2 *Sean $A\in\mathcal{M}$ y $f(z)=(a,\mu)(z^{-1})\in\mathcal{T}$ de forma que $\tilde{f}(z)\in\mathcal{T}$. Entonces*

$$f(A^*) = f(A)^*.$$

Demostración. Por el teoremas 3.5 y 3.8 se tiene

$$\tilde{f}((1+A^*)^{-1}) = \tilde{f}((1+A)^{-1})^*,$$

de donde, tras tomar inversos,

$$f(1+A^*) = f(1+A)^*.$$

Por la proposición 3.6 aplicada a ambos miembros de la última igualdad

$$f(1+A)^* = (f(A)+F_1)^* = f(A)^* + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+t}\, J_t^{A^*}\, J_{\frac{t}{1+t}}^{A^*}\, d\mu(t)$$

y

$$f(1+A^*) = f(A^*) + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+t}\, J_t^{A^*}\, J_{\frac{t}{1+t}}^{A^*}\, d\mu(t).$$

Por consiguiente, al estar el sumando común en $\mathcal{L}(X^*)$, se obtiene la igualdad deseada. ■

Corolario 3.3 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $f(z) \in \mathcal{T}_0$. Entonces $A \in \mathcal{L}(X)$ si, y sólo si, $f(A) \in \mathcal{L}(X)$.*

Demostración. Por el teorema 3.5 si $A \in \mathcal{L}(X)$ entonces $f(A) \in \mathcal{L}(X)$. Recíprocamente, si $A \not\in \mathcal{L}(X)$ entonces $0 \in \sigma(A^{-1})$. Si $0 \in \rho(A)$ entonces por el teorema espectral para operadores acotados y el teorema 3.8

$$0 = \tilde{f}(0) \in \{\tilde{f}(z) : z \in \sigma(A^{-1})\} = \sigma(\tilde{f}(A^{-1})) = \sigma(f(A)^{-1}),$$

con lo que $f(A) \notin \mathcal{L}(X)$. Si $0 \in \sigma(A)$ consideramos el operador $1+A$ que está el las condiciones anteriores por lo que se verifica $f(1+A) \notin \mathcal{L}(X)$. Por la proposición 3.6 se concluye que $f(A) \notin \mathcal{L}(X)$. ■

En el siguiente corolario se establece que nuestra construcción coincide, al menos, con la de Martínez-Sanz (véase [MS2]) en el caso más interesante, esto es, cuando $f(z)$ y $\tilde{f}(z)$ están en la clase $\mathcal{T}$. (Obsérvese que también coinciden por ejemplo sobre la clase $\mathcal{S}_0$).

Lema 3.3 *Si $f(z) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$ entonces*

$$(1+A)\, f(A)\, J_1^A = (1+\lambda A)\, f(A)\, J_\lambda^A, \quad \forall \lambda > 0.$$

Demostración. Sea $\lambda > 0$. La relación

$$f(A)\, J_\lambda^A u = \frac{1}{\lambda}\, (f(A)\, J_1^A u + (\lambda - 1)\, f(A)\, J_1^A\, J_\lambda^A u), \quad \forall u \in X,$$

implica sin dificultad que el dominio de ambos operadores es el mismo. Sea $u \in X$ de forma que $f(A)\, J_1^A u \cap D(A) \neq \varnothing$. Entonces

$$(J_1^A + \lambda A_1)\, f(A)\, J_\lambda^A u = f(A)\, J_1^A u,$$

de donde

$$(1 + \lambda A)\, f(A)\, J_\lambda^A u = (1 + A)\, (J_1^A + \lambda A_1)\, f(A)\, J_\lambda^A u = (1 + A)\, f(A)\, J_1^A u.$$

■

Teorema 3.9 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ que no se anula con $\tilde{f}(z) = (\tilde{a}, \tilde{\mu})(z^{-1}) \in \mathcal{T}$. Se cumplen:*

(i) *$f(A)$ es cerrado. En particular*

$$f(A) = \liminf_{\epsilon \to 0} f(A + \epsilon).$$

(ii) *Si A es univaluado entonces*

$$f(A) = (1 + A)\, f(A)(1 + A)^{-1} = S + AT.$$

Si además A es densamente definido, entonces

$$f(A) = \overline{W_f(A)}.$$

Demostración. (i) Por el teorema 3.8 $f(1 + A)$ tiene inverso en $\mathcal{L}(X)$ luego es cerrado. Por la proposición 3.6 $f(A)$ es cerrado al ser suma de un operador cerrado con un operador acotado.

(ii) En primer lugar como, $\forall u \in X$, se tiene

$$W_f(A)\, (1 + A)^{-1} u = (1 + A)^{-1} [Su - \int_{[0,1]} J_t^A u \, d\mu(t)] + \int_{[0,1]} J_t^A u \, d\mu(t),$$

se obtiene fácilmente la igualdad

$$(I + A)\, f(A)\, (I + A)^{-1} = S + AT.$$

Por la proposición 3.4 tenemos

$$W_f(A) \subseteq f(A) \subseteq AT + S,$$

donde todos los operadores relacionados son univaluados. Sólo resta probar que si $u \in X$ con $f(A)(1+A)^{-1}u \cap D(A) \neq \varnothing$ entonces $u \in D(f(A))$. Cuando A tiene inverso acotado, si $v = W_f(A)(1+A)^{-1}u \in D(A)$ y $w = (1+A)v$, entonces

$$(1+A)^{-1}u = (A^{-1})(1+A)^{-1}w = \tilde{a}\,(1+A)^{-1}w + \int_{[0,\infty[}(A^{-1})_t(1+A)^{-1}w\,d\tilde{\mu}(t).$$

Como la resolvente conmuta con $\tilde{f}(A^{-1})$, por que lo hace con $(A^{-1})_t$ para $t \geq 0$, entonces

$$(1+A)^{-1}(\tilde{f}(A^{-1})w - u) = 0,$$

deduciéndose de ello que $u = \tilde{f}(A^{-1})w$, es decir, $w = f(A)u$.

Para un $A \in \mathcal{M}$ arbitrario consideramos el operador $A+\epsilon$ para un $\epsilon > 0$ que tiene inverso acotado y que por lo tanto verifica la igualdad

$$f(A+\epsilon) = (1+\epsilon+A)\, f(A+\epsilon)\,(1+\epsilon+A)^{-1}.$$

Luego si $f(A)(1+A)^{-1}u \in D(A)$ tenemos, aplicando el lema anterior, que $f(A)(1+\epsilon+A)^{-1}u \in D(A)$. Por la proposición 3.6

$$\begin{aligned} f(A+\epsilon)\,(1+\epsilon+A)^{-1}u &= f(A)\,(1+\epsilon+A)^{-1}u + F_\epsilon(1+\epsilon+A)^{-1}u \\ &= f(A)\,(1+\epsilon+A)^{-1}u + (1+\epsilon+A)^{-1}F_\epsilon u, \end{aligned}$$

de donde, al estar el elemento de la derecha de la última igualdad en $D(A)$, obtenemos que $u \in D(f(A+\epsilon)) = D(f(A))$.

Para la segunda afirmación como $f(A)$ es cerrado obtenemos el resultado si comprobamos que

$$AT + S \subseteq \overline{W_f(A)}.$$

Sea $u \in X$ tal que $Tu \in D(A)$. Teniendo presente que A es densamente definido se puede afirmar:

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda^A u = u \;\text{ y }\; \lim_{\lambda\to 0} W_f(A)\,J_\lambda^A u = \lim_{\lambda\to 0} J_\lambda^A(AT+S)u = (AT+S)u,$$

y por tanto $\overline{W_f(A)}$ es una extensión de $AT+S$. ∎

Proposición 3.7 *Sean* $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ *con* $\tilde{f}(z) = (\tilde{a}, \tilde{\mu})(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ *y* $A \in \mathcal{M}$. *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si* $\mu(\{0\}) = 0$ *y* $\tilde{a} = 0$ *entonces*

$$D(A) \subseteq D(f(A)) \subseteq \overline{D(A)},$$

y el operador $W_f(A)$ *es cerrable con*

$$\overline{W_f(A)} = f(A)_D = f(A_D).$$

(ii) *Si* $\mu(\{0\}) \neq 0$ *entonces*

$$\overline{W_f(A_D)} = f(A)_D = f(A_D).$$

(iii) *En los dos casos anteriores se tiene*

$$\lim_{\lambda \to 0} f(A + \epsilon)_D = f(A)_D.$$

Demostración. (i) Sabemos que $D(A) \subseteq D(f(A)$ con $W_f(A)u \in f(A)u$, $\forall u \in D(A)$. Para probar que $D(f(A) \subseteq \overline{D(A)}$ basta observar que

$$D(f(A)) = R(f(A)^{-1}) = R(\tilde{f}(A^{-1})),$$

y comprobar que si $g \in \mathcal{T}$ con $g(0) = 0$ y $B \in \mathcal{M}$, entonces $R(g(B)) \subseteq \overline{R(B)}$. Ahora bien, por definición de $g(B)$ es inmediato que

$$R(g(B)) \subseteq \overline{\bigcup_{\lambda > 0} R(g(B_\lambda))} \subseteq \overline{R(B)}.$$

Por otra parte,

$$W_f(A)u = au + \int_{]0,\infty[} A_t u \, d\mu(t) \in \overline{D(A)}, \quad \forall u \in D(A),$$

luego $W_f(A) \cap \overline{D(A)} \times \overline{D(A)} = W_f(A)$. Es ya evidente que $f(A)_D$ es un operador cerrado y univaluado puesto que $f(A)0 \cap \overline{D(A)} \subseteq A0 \cap \overline{D(A)} = \{0\}$. Por tanto, $W_f(A)$ es cerrable y $\overline{W_f(A)} \subseteq f(A)_D$. Sea $(u, v) \in f(A)_D$; como

$$(J_\lambda^A u, J_\lambda^A v) \in f(A) \cap D(A) \times \overline{D(A)} = W_f(A)$$

y $\lim_{\lambda\to 0}(J_\lambda^A u, J_\lambda^A v) = (u,v)$ entonces $(u,v) \in \overline{W_f(A)}$. En definitiva $\overline{W_f(A)} = f(A)_D$.

Es ya evidente que $f(A_D) = \overline{W_f(A_D)} \subseteq \overline{W_f(A)}$. Sea $v = \overline{W_f(A)}u$; como

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda^A u = u \text{ y } \lim_{\lambda\to 0} W_f(A_D)\, J_\lambda^A u = \lim_{\lambda\to 0} \overline{W_f(A)}\, J_\lambda^A u = v,$$

entonces $v = \overline{W_f(A_D)}u$, obteniéndose así la otra inclusión.

(ii) Sabemos que $f(A)_D$ es un operador uniforme y cerrado que extiende a $W_f(A_D)$ luego $f(A_D) \subseteq f(A)_D$. La inclusión restante se prueba como en el caso anterior.

(iii) Para probar la convergencia puntual indicada notar que por la proposición 3.6 se tiene

$$f(A+\epsilon)_D = f((A+\epsilon)_D) = f(A_D+\epsilon) = f(A_D) + F_\epsilon = f(A)_D + F_\epsilon.$$

■

Corolario 3.4 *Sean $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ con $\widetilde{f}(z) = (\widetilde{a},\widetilde{\mu})(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ y $A \in \mathcal{M}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $\widetilde{\mu}(\{0\}) = 0$ y $a = 0$ entonces*

$$R(A) \subseteq R(f(A)) \subseteq \overline{R(A)},$$

y el operador $W_{\widetilde{f}}(A^{-1})$ es cerrable con

$$\overline{W_{\widetilde{f}}(A^{-1})} = (f(A)_R)^{-1} = f(A_R)^{-1}.$$

(ii) *Si $\widetilde{\mu}(\{0\}) \neq 0$ entonces*

$$\overline{W_{\widetilde{f}}(A_R^{-1})} = (f(A)_R)^{-1} = f(A_R)^{-1}.$$

(iii) *En los dos casos anteriores se tiene*

$$\lim_{\lambda\to 0} f(A+\epsilon)_R = f(A)_R.$$

Demostración. Aplicar la proposición anterior a A^{-1} y $\widetilde{f}$ para obtener (i) y (ii) . Para probar (iii) úsense las relaciones siguientes:

$$f(A+\epsilon)_R = f((A+\epsilon)_R) = f(A_R+\epsilon) = f(A_R) + F_\epsilon = f(A)_R + F_\epsilon.$$

■

Corolario 3.5 *Sean $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_0$ y $A \in \mathcal{M}$. Entonces $f(A_D) \subsetneq f(A)$ si, y solamente si, $\overline{D(A)} \subsetneq X$.*

Demostración. Por la proposición previa $f(A_D) = f(A)_D$. Supongamos que $\overline{D(A)} \subsetneq X$. El corolario 3.1 nos asegura que $R(A) \subseteq R(f(A))$, y la proposición 2.5 que existe $v \in R(A)$ con $v \notin \overline{D(A)}$. Entonces tenemos que existe $(u,v) \in f(A)$ que no está en $f(A_D)$. La otra implicación es obvia. ■

Teorema 3.10 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_0$ entonces*

$$A0 = f(A)0,$$

y

$$f(A) = (1+A)\, f(A)\, (1+A)^{-1} \mid_{\overline{D(A)}} = S + AT \mid_{\overline{D(A)}}. \tag{3.13}$$

Demostración. La inclusión $f(A)0 \subseteq A0$ es siempre válida. Sea $(0,v) \in A$. Como $f(A)^{-1} = \widetilde{f}(A^{-1})$ entonces basta probar que $(v,0) \in \widetilde{f}(A^{-1})$. Sea $\widetilde{f}(z) = (0,\widetilde{\mu})(z^{-1})$. Tenemos

$$(A^{-1})_{\lambda+t}\, A_{\lambda+1} = (1 - J^A_{\frac{1}{\lambda+t}})\, J^A_\lambda\, J^{A_\lambda}_1,$$

luego

$$\left\| \int_{[0,1]} (A^{-1})_{\lambda+t}\, A_{\lambda+1} v \; d\widetilde{\mu}(t) \right\| \le M(A)\,(M(A)+1) \left\| J^{A_\lambda}_1 v \right\| |\widetilde{\mu}|\,([0,1]),$$

y por tanto,

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_{[0,1]} (A^{-1})_{\lambda+t}\, A_{\lambda+1} v \; d\widetilde{\mu}(t) = 0.$$

Este hecho permite afirmar que

$$(v,0) \in \liminf_{\lambda\to 0} \int_{[0,1]} (A^{-1})_{\lambda+t} \; d\widetilde{\mu}(t),$$

y puesto que

$$\int_{]1,\infty[}(A^{-1})_t v\, d\tilde{\mu}(t) = \int_{]1,\infty[}\frac{1}{t}\, J^A_{\frac{1}{t}} v\, d\tilde{\mu}(t) = 0,$$

entonces $(v,0) \in \tilde{f}(A^{-1})$. Queda así probada la inclusión $A0 \subseteq f(A)0$.

Probemos ahora la primera igualdad de (3.13). Sea $(u,v) \in f(A)$; sabemos que $(1+A)^{-1}v \in f(A)(1+A)^{-1}u$ con lo que $v \in (1+A)\, f(A)\, (1+A)^{-1}u$. Como $f(A)0 = (1+A)\, f(A)\, (1+A)^{-1}0$ entonces para deducir la igualdad buscada es suficiente con demostrar la inclusión de dominios que aún desconocemos, es decir, si $u \in \overline{D(A)}$ es tal que $f(A)(1+A)^{-1}u \cap D(A) \neq \varnothing$ entonces $u \in D(f(A))$.

Comencemos probando el resultado buscado en el caso de que $0 \in \rho(A)$. Sean $u \in \overline{D(A)}$ tal que $v = f(A)_D(1+A)^{-1}u \in D(A)$ y $w \in (1+A)v$. Basta comprobar que

$$u = \tilde{f}(A^{-1})w = \int_{\mathbb{R}_+}(A^{-1})_t w\, d\tilde{\mu}(t).$$

Ahora bien, como tenemos

$$\tilde{f}(A^{-1})(1+A)^{-1}w = (1+A)^{-1}u$$

y la resolvente conmuta con $\tilde{f}(A^{-1})$, por que lo hace con $(A^{-1})_t$ para $t \geq 0$, entonces

$$(1+A)^{-1}(\tilde{f}(A^{-1})w - u) = 0.$$

Por lo tanto, al tener que $\tilde{f}(A^{-1})w \in \overline{D(A)}$, se obtiene que $u = \tilde{f}(A^{-1})w$.

Para un $A \in \mathcal{M}$ cualquiera razonaríamos exactamente como en el apartado (ii) del teorema 3.9.

Finalmente, como $\forall u \in \overline{D(A)}$ se tiene

$$f(A)_D(1+A)^{-1}u = (1+A)^{-1}[Su - \int_{[0,1]} J^A_t u\, d\mu(t)] + \int_{[0,1]} J^A_t u\, d\mu(t),$$

podemos confirmar la validez de la segunda igualdad de (3.13). ■

Nota 3.7 Razonando como acabamos de hacer se tiene también que

$$f(A) = a + \int_{]b,\infty[} A_t\ d\mu(t) + A\int_{[0,b]} J^A_t\ d\mu(t) \mid_{\overline{D(A)}}, \quad \forall b > 0.$$

Obsérvese que en las condiciones del teorema anterior no se puede esperar, como sucede en el caso univaluado, que $f(A) = (1+A)\, f(A)\, (1+A)^{-1}$(teorema 3.9), puesto que esta relación implica que A es univaluado. En efecto, por la anterior igualdad si $u \in X$ es tal que $f(A)(1+A)^{-1}u \cap D(A) \neq \varnothing$ se tiene que $u \in D(f(A))$ y por tanto está en $\overline{D(A)}$, luego si $v \in A0$ tenemos que

$$0 \in f(A)(1+A)^{-1}v \cap D(A),$$

lo que implica que $v \in \overline{D(A)}$, y por consiguiente $v = 0$. No obstante, cuando $\mu(\{0\}) \neq 0$ si que es cierta la igualdad $f(A) = S + AT$.

En el resultado anterior si $\tilde{f}(0) \neq 0$ la conclusión que extraemos es que $f(A)0 \subseteq \dot{D}(f(A))$. Si adicionalmente $f \in \mathcal{T}_+$ ($\Rightarrow f \in \mathcal{S}_0$) se llega a que $f(A)$ es univaluado. Por tanto, no es cierta en general la fórmula de diagonalización.

Corolario 3.6 *Sean $f(z) = (0,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$, con $\tilde{f}(z) = (\tilde{a},\tilde{\mu})(z^{-1}) \in \mathcal{T}$, y $A \in \mathcal{M}$. Entonces*

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} f(A).$$

3.4 Fórmulas del producto. Consecuencias.

Teorema 3.11 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f, g \in \mathcal{T}_0$ con $h = f\,g \in \mathcal{T}_0$ entonces*

$$h(A) = f(A)\,g(A) = g(A)\,f(A). \tag{3.14}$$

Demostración. Como el operador $A + \epsilon$, con $\epsilon > 0$, tiene inverso acotado por la fórmula del producto para operadores acotados (teorema 3.5)

$$\tilde{g}((A+\epsilon)^{-1})\,\tilde{f}((A+\epsilon)^{-1}) = \tilde{h}((A+\epsilon)^{-1}),$$

de donde, teniendo en cuenta el teorema 3.8 y tras tomar inversos,

$$f(A+\epsilon)\,g(A+\epsilon) = h(A+\epsilon), \quad \forall \epsilon > 0.$$

Sea $(u,v) \in h(A)$. Por la proposición 3.6 para cada $\epsilon > 0$ existe un operador acotado H_ϵ de forma que

$$v + H_\epsilon u \in h(A+\epsilon)u = f(A+\epsilon)\, g(A+\epsilon)u = f(A+\epsilon)\, g(A+\epsilon)_D u,$$

y con $\lim_{\lambda \to 0} \|H_\epsilon\| = 0$. Por la proposición 3.7 tenemos

$$\lim_{\lambda \to 0} g(A+\epsilon)_D u = g(A)_D u,$$

luego

$$(g(A)_D u, v) \in \liminf_{\lambda \to 0} f(A+\epsilon) = f(A),$$

es decir, $(u,v) \in f(A)\, g(A)$. Nótese que tenemos

$$h(A)0 = A0 = f(A)\, g(A)0,$$

por lo que para concluir la igualdad buscada, bastar con probar la inclusión de dominios que queda pendiente. Si $(u,v) \in f(A)\, g(A)$, es decir $(g(A)_D u, v) \in f(A)$, entonces por la proposición 3.4 y la inclusión que acabamos de probar

$$\begin{aligned}(1+A)^{-1}v &\in f(A)\,(1+A)^{-1} g(A)_D u = f(A)\, g(A)_D (1+A)^{-1} u \\ &= h(A)(1+A)^{-1}u,\end{aligned}$$

esto es,

$$h(A)(1+A)^{-1}u \cap D(A) \neq \varnothing,$$

luego, por el teorema 3.10, $u \in D(h(A))$. ■

Revisando la anterior demostración se observa que ésta es válida para operadores univaluados exigiendo únicamente que las tres funciones y sus respectivas reversas estén en $\mathcal{T}$. Como veremos en los siguientes resultados el caso anterior no es el único en el que se verifica la fórmula del producto.

Teorema 3.12 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $f \in \mathcal{T}$ y $g \in \mathcal{S}_0$ de forma que $h = f\, g \in \mathcal{T}$, entonces*

$$g(A)\, f(A) \subseteq h(A) \subseteq f(A)\, g(A).$$

Si además $f \in \mathcal{S}_0$ se verifica (3.14).

(ii) *Si $f \in \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{S}_0$ no se anula y $g \in \mathcal{T}_0$ de forma que $h = f\,g \in \mathcal{T}_0$, entonces se tiene* (3.14).

(iii) *Si $f, g \in \mathcal{T}_+$ no se anulan y $h = f\,g \ \in \mathcal{T}_+$ entonces se verifica la fórmula del producto* (3.14).

Demostración. (i) En primer lugar, por la fórmula del producto para operadores acotados,

$$h(A_\lambda) = f(A_\lambda)\,g(A_\lambda) = g(A_\lambda)\,f(A_\lambda), \quad \forall \lambda > 0.$$

Sea $(u, v) \in h(A)$. Existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ en X tal que

$$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u \text{ y } \lim_{\lambda\to 0} h(A_\lambda)\,u_\lambda = \lim_{\lambda\to 0} f(A_\lambda)\,g(A_\lambda)\,u_\lambda = v.$$

Como $\lim_{\lambda\to 0} g(A_\lambda)u = u$ y la red de operadores acotados $\{g(A_\lambda)\}_{\lambda>0}$ está uniformemente acotada se tiene que

$$\lim_{\lambda\to 0} g(A_\lambda)\,u_\lambda = g(A)u,$$

luego por definición $(g(A)u, v) \in f(A)$ y consecuentemente $(u, v) \in f(A)\,g(A)$.

Consideremos ahora $(u, v) \in g(A)\,f(A)$. Existe $w \in f(A)u$ con $v = g(A)w$. Por definición de $f(A)$ existe una red $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ en X tal que

$$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u \text{ y } \lim_{\lambda\to 0} f(A_\lambda)\;u_\lambda = w.$$

Razonando como anteriormente se obtiene

$$\lim_{\lambda\to 0} h(A_\lambda)\,u_\lambda = \lim_{\lambda\to 0}\; g(A_\lambda)\;f(A_\lambda)\,u_\lambda = v,$$

lo que implica que $(u, v) \in h(A)$.

Finalmente, si de forma adicional $f \in \mathcal{S}_0$ es ya evidente que se da la fórmula del producto.

(ii) Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_+$ entonces con la notación de la sección 3.1 se tiene que $f(z) = (b, \nu)(z) \in \mathcal{S}_0$ con $b > 0$. Por el apartado previo

$$f(A)\,g(A) \subseteq h(A) \subseteq g(A)\,f(A)$$

donde
$$f(A) = b + \int_{]0,\infty[} (t + A)^{-1}\, d\nu(t) \in \mathcal{L}(X).$$
Como $f(A)\, g(A)0 = A0 = g(A)\, f(A)0$ entonces para probar la fórmula del producto basta con mostrar que si $u \in X$ es tal que $f(A)u \in D(g(A))$ se tiene necesariamente que $u \in D(g(A))$. Por la proposición 3.6

$$f(1 + A) = f(A) + F_1 = f(A) + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{1+t}\, J_t^A\, J_{\frac{t}{1+t}}^A\, d\mu(t).$$

Por ser A cerrado y

$$\int_{]0,\infty[} \frac{1}{1+t} \left\| A_{\frac{t}{1+t}} \right\| d\,|\mu|\,(t) \leq (M(A) + 1) \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t}\, d\,|\mu|\,(t),$$

entonces $F_1 u \in D(A) \subseteq D(g(A))$, de donde

$$f(1 + A)u \in D(g(A)) = D(g(1 + A)).$$

Razonando de nuevo a partir de la fórmula del producto para operadores acotados se tiene:

$$f(1 + A)\, g(1 + A) = g(1 + A)\, f(1 + A).$$

Por tanto, $u \in D(g(1 + A)) = D(g(A))$.

(iii) Este caso se reduce a alguno de los casos ya estudiados. En efecto, aplicamos el teorema 3.11 si $f, g \in \mathcal{T}_0$, si $f \in \mathcal{S}_0$ y $g \in \mathcal{T}_0$ entonces es la primera parte de este apartado la que debemos considerar, mientras que en el caso restante utilizamos el apartado (i) del presente teorema. ■

Nota 3.8 En el apartado (i) del teorema anterior no podemos esperar que se produzca en general la igualdad, pues si tomamos $f(z) = (1 + z) \in \mathcal{T}_0$, $g(z) = \frac{1}{1+z} \in \mathcal{S}_0$ (notar que no tiene reversa), $h(z) = 1 \in \mathcal{T}_+$ y si A es propiamente multivaluado, las dos inclusiones del enunciado son estrictas. Este mismo ejemplo pone de manifiesto que la condición $f(z) \in \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{S}_0$ en el apartado (ii) no se puede sustituir por $f(z) \in \mathcal{S}_0$.

Obsérvese nuevamente que si $f(z) \in \mathcal{T}_+$ entonces $f(A) \in \mathcal{M}$. Para $\lambda > 0$ sabemos que $1 - \lambda f_\lambda(z) \in \mathcal{S}_0$, $1 + \lambda f(z) \in \mathcal{T}_+$ y su producto está en $\mathcal{T}_+$, luego $1 \subseteq (1 + \lambda f(A))(1 - \lambda f_\lambda(A))$ e $(1 - \lambda f_\lambda(A))\,(1 + \lambda f(A)) \subseteq 1$, de donde $(1 + \lambda f(A))^{-1} = (1 - \lambda f_\lambda(A)) \in \mathcal{L}(X)$ y $M(f(A)) \leq M(A)$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$, con $0 < \alpha < 1/2$, la familia $\{S(t)\}_{t>0}$ de operadores de $\mathcal{L}(X)$, obtenidos a partir de las funciones del ejemplo 3.3,

$$S(t) = e^{-tz^\alpha}(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\,s^\alpha \cos \alpha\pi} \operatorname{sen}(t\,s^\alpha \; sen\alpha\pi)\,(s+A)^{-1}\,ds,\; t>0,$$

y $S(0) = 1$, verifica la propiedad de semigrupo, es decir,

$$S(t_1)\,S(t_2) = S(t_2)\,S(t_1) = S(t_1+t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

La siguiente propiedad permite, si ese es el proceso que se desea seguir, extender por aditividad el concepto de potencia fraccionaria a los $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha \geq 1$.

Corolario 3.7 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f(z) = (a,\mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_0$ con $\mu(\{0\}) = 0$ ($f(z) \in \mathcal{T}_+$) entonces*

$$A = f(A)\,\overline{f}(A) = \overline{f}(A)\,f(A).$$

Demostración. En las condiciones pedidas a f se tiene que $\overline{f} \in \mathcal{T}_0$, luego basta con aplicar el teorema 3.11. Si $f(z) \in \mathcal{T}_+$ entonces $\overline{f} \in \mathcal{T}_+$, y en consecuencia, las identidades buscadas se obtienen por el apartado (iii) del teorema 3.12. ■

Corolario 3.8 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f(z), g(z) \in \mathcal{T}_+$ de forma que existe $h(z) \in \mathcal{T}_+$ con $g(z) = h(z)\,f(z)$ entonces*

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A).$$

Por tanto, el operador $f(A) + g(A)$ es no negativo.

Demostración. Como hemos visto en el teorema 3.12 se da la fórmula del producto en $\mathcal{T}_+$, luego:

$$h(A)\,f(A) = g(A) = f(A)\,h(A)$$

y

$$(f+g)(A) = (1+h(A))\,f(A) = f(A)\,(1+h(A)),$$

con lo que se comprueba de forma trivial la propiedad enunciada. ■

Corolario 3.9 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_+$ con $\mu(\{0\}) > 0$ entonces*

$$f(A) = W_f(A).$$

Demostración. Por la proposición 3.4 sólo resta probar que $D(f(A)) \subseteq D(A)$. Definimos $g(z) = f(z) - \mu(\{0\})\, z \in \mathcal{T}_+$. Como

$$f(z) = g(z)\,(1 + \mu(\{0\})\,\overline{g}(z)),$$

y $(1 + \mu(\{0\})\,\overline{g}(z)) \in \mathcal{T}_+$, entonces por la fórmula del producto en $\mathcal{T}_+$ y el corolario 3.7

$$f(A) = (1 + \mu(\{0\})\overline{g}(A))\, g(A) = g(A) + \mu(\{0\})\, A,$$

de donde, como $D(A) \subseteq D(g(A))$, se obtiene la inclusión de dominios deseada. ■

3.5 Ley de la composición y teorema de la aplicación espectral.

Esta sección la empleamos en primer lugar para incluir la composición de funciones entre las operaciones del Cálculo Simbólico, y en segundo término para establecer relaciones entre el espectro de A y de $f(A)$ para $A \notin \mathcal{L}(X)$ (caso que excluimos puesto que el teorema de la aplicación espectral para los operadores de $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ ya ha sido probado en el teorema 3.5).

Teorema 3.13 *Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{S}_0$ $(\supset \mathcal{T}_+)$ y $g(z) = (b, \nu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_+$ entonces*

$$f(g(A)) = (f \circ g)(A).$$

Demostración. Destaquemos para empezar que el operador $f(g(A))$ está bien definido pues $g(A) \in \mathcal{M}$, y lo propio se puede decir de $(f \circ g)(A)$ ya que en el teorema 3.3 se demostró que $f \circ g \in \mathcal{T}$ (incluso en la clase $\mathcal{T}_+$ si $f \in \mathcal{T}_+$). Supongamos en primer lugar que $f \in \mathcal{T}_0$. Si g toma el valor cero el resultado es trivial y por tanto podemos asumir que ésto no sucede. Con nuestra hipótesis $(f \circ g)(z) = \tilde{f}(\tilde{g}(z)) \in \mathcal{T}$, luego por la ley de la composición para operadores de $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$,

$$\tilde{f}(\tilde{g}((A+\epsilon)^{-1})) = \widetilde{(f \circ g)}((A+\epsilon)^{-1}), \quad \forall \epsilon > 0,$$

y al tomar inversos

$$f(g(A+\epsilon)) = (f \circ g)(A+\epsilon), \quad \forall \epsilon > 0.$$

Por el corolario 3.7 tenemos que

$$\liminf_{\epsilon \to 0} (f \circ g)(A+\epsilon) = (f \circ g)(A),$$

luego para concluir la demostración es suficiente con probar que

$$\liminf_{\epsilon \to 0} f(g(A+\epsilon)) = f(g(A)).$$

Por el teorema 3.10, recordando que siempre $D(g(A+\epsilon)) = D(g(A))$, $\forall \epsilon > 0$, se tiene:

$$f(g(A+\epsilon)) = a + \int_{]1,\infty[} g(A+\epsilon)_t \, d\mu(t) + g(A+\epsilon) \int_{[0,1]} J_t^{g(A+\epsilon)} \, d\mu(t)|_{\overline{D(g(A))}}$$

y

$$f(g(A)) = a + \int_{]1,\infty[} g(A)_t \, d\mu(t) + g(A) \int_{[0,1]} J_t^{g(A)} \, d\mu(t)|_{\overline{D(g(A))}}.$$

La proposición 3.6 afirma que, $\forall \epsilon > 0$, existe un operador $G_\epsilon \in \mathcal{L}(X)$, con $\lim_{\epsilon \to 0} G_\epsilon = 0$, de modo que $g(A+\epsilon) = g(A) + G_\epsilon$; por consiguiente, teniendo en cuenta que las resolventes de A y de $g(A)$ conmutan, se obtiene la relación:

$$\int_{[0,1]} (J_t^{g(A)} - J_t^{g(A+\epsilon)}) \, d\mu(t) = G_\epsilon \int_{[0,1]} t \, J_t^{g(A+\epsilon)} \, J_t^{g(A)} \, d\mu(t).$$

Como el rango de este último operador de $\mathcal{L}(X)$ está contenido en $D(g(A))$ con

$$G_\epsilon \int_{[0,1]} J_t^{g(A+\epsilon)} (1 - J_t^{g(A)}) \, d\mu(t) \subseteq g(A) \int_{[0,1]} (J_t^{g(A+\epsilon)} - J_t^{g(A)}) \, d\mu(t),$$

entonces

$$\begin{aligned} f(g(A+\epsilon)) &= f(g(A)) + \int_{]1,\infty[} (g(A+\epsilon)_t - g(A)_t)\, d\mu(t) \\ &\quad + G_\epsilon \int_{[0,1]} t J_t^{g(A+\epsilon)} J_t^{g(A)}\, d\mu(t). \end{aligned}$$

Los dos últimos sumandos representan un operador acotado que llamamos F_ϵ y se verifica

$$\|F_\epsilon\| \leq M(A)^2 [\|G_\epsilon\| \, |\mu| ([0,1]) + \int_{]1,\infty[} (\int_{]0,\infty[} \frac{\epsilon}{1+\epsilon s}\, d\nu_t(s))\, d\,|\mu|\,(t)].$$

El segundo sumando de la última expresión converge a cero cuando $\epsilon \longrightarrow 0$ por convergencia dominada ya que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{]0,\infty[} \frac{\epsilon}{1+\epsilon s}\, d\nu_t(s) = 0, \quad \forall t > 1,$$

y

$$\int_{]0,\infty[} \frac{\epsilon}{1+\epsilon s}\, d\nu_t(s) \leq g_t(1) - g_t(0), \quad \forall \epsilon \leq 1,$$

donde $g_t(1) - g_t(0)$ es $|\mu|\,(t)$ - integrable en $]1,\infty[$. Por lo que acabamos de razonar

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|F_\epsilon\| = 0,$$

hecho que nos conduce sin dificultad a la relación

$$f(g(A)) \subseteq \liminf_{\epsilon \to 0} f(g(A+\epsilon)).$$

Sea $(u,v) \in \liminf_{\epsilon\to 0} f(g(A+\epsilon))$. Por definición, existe $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in f(g(A+\epsilon))$ de modo que

$$\lim_{\epsilon \to 0} (u_\epsilon, v_\epsilon) = (u,v).$$

Por lo ya demostrado se tiene que, $\forall \epsilon > 0$, existe $(u_\epsilon, w_\epsilon) \in f(g(A))$ de forma que $v_\epsilon = w_\epsilon + F_\epsilon u_\epsilon$, y como $\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon u_\epsilon = 0$ entonces $(u,v) \in \overline{f(g(A))} = f(g(A))$.

Finalmente supongamos que $f \in \mathcal{S}_0$. Por la ley de la composición para el caso acotado

$$f(g(A_\lambda)) = (f \circ g)(A_\lambda), \quad \forall \lambda > 0.$$

Basta pues tomar límites cuando $\lambda \to 0$ en la anterior igualdad teniendo en cuenta que $\liminf_{\lambda \to 0} A_\lambda = A$ con $M(A_\lambda) \leq \max\{M(A), 1\}$ y la "continuidad" probada en la proposición 3.5 para las funciones de $\mathcal{S}_0$. ■

Teorema 3.14 *Sea $A \in \mathcal{M}$ con $A \notin \mathcal{L}(X)$. Se tienen las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}_0$ entonces*

$$\{f(s) : s \in \sigma(A)\} \subseteq \sigma(f(A)).$$

(ii) *Si $f(z) \in \mathcal{S}_0$ entonces*

$$\sigma(f(A)) = \{f(s) : s \in \sigma(A)\} \cup \{f(\infty)\}.$$

(iii) *Si $f(z) \in \mathcal{T}_+ \setminus \mathcal{S}_0$ entonces*

$$\sigma(f(A)) = \{f(s) : s \in \sigma(A)\}.$$

Demostración. (i) En primer lugar si $s \in \sigma(A)$ es no nulo entonces

$$f(z) - f(s) = (z - s)\, h(z),$$

con

$$h(z) = \mu(\{0\}) + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{(1 + ts)\,(1 + tz)}\, d\mu(t) = \mu(\{0\}) + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{r + z}\, d\nu(r),$$

siendo $d\nu(r) = \frac{r^2}{r+s}\, d\mu(r^{-1})$ en $]0, \infty[$ y $\nu(\{0\}) = 0$. Tenemos $h(z) \in \mathcal{S}_0$ puesto que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{r}\, d\nu(r) = \int_{]0,\infty[} \frac{1}{1 + ts}\, d\mu(t).$$

Por el teorema 3.12 son ciertas las inclusiones

$$h(A)\,(A - s) \subseteq f(A) - f(s) \subseteq (A - s)\, h(A)\ ,$$

pues por la proposición 3.5 se tiene $f(A) - f(s) = (f(z) - f(s))(A)$. Si $f(s) \in \rho(f(A))$ de la primera inclusión se deduce que $A - s$ es suprayectivo y de la segunda que es inyectivo; en consecuencia, al ser un operador cerrado, $(A - s)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, lo que contradice la elección de s. Así deducimos que $f(s) \in \sigma(f(A))$.

Analicemos ahora el caso que hemos excluido. Si $0 \in \sigma(A)$ vamos a comprobar que $a = f(0) \in \sigma(f(A))$ con lo quedará probada nuestra afirmación. Como comentamos en la nota 3.7 tenemos que para todo $b > 0$

$$f(A) - a = \int_{]b,\infty[} A_t \, d\mu(t) + A \int_{[0,b]} J_t^A \, d\mu(t)|_{\overline{D(A)}}.$$

Nótese que

$$\int_{]b,\infty[} \|A_t\| \; d\,|\mu|\,(t) \leq 2(M(A)+1) \int_{]b,\infty[} \frac{1}{1+t} \, d\,|\mu|\,(t) \to 0,$$

si $b \to \infty$. Si suponemos que $a \in \rho(f(A))$ tenemos:

$$A \int_{[0,b]} J_t^A \, d\mu(t)|_{\overline{D(A)}} = [1 - \int_{]b,\infty[} A_t \, (f(A) - a)^{-1} \, d\mu(t)] \, (f(A) - a),$$

luego, eligiendo b suficientemente grande, el operador $A \int_{[0,b]} J_t^A \, d\mu(t)|_{\overline{D(A)}}$ es invertible en $\mathcal{L}(X)$. Si $(u, v) \in A$ entonces

$$\int_{[0,b]} J_t^A v \, d\mu(t) \in A \int_{[0,b]} J_t^A u \, d\mu(t),$$

por lo que $(u, 0) \in A$ implica $0 \in A \int_{[0,b]} J_t^A u \, d\mu(t)$, de donde $u = 0$, es decir, A es inyectivo. Como evidentemente $R(A) = X$ y A es cerrado, se tiene $0 \in \rho(A)$.

(ii) Si $f(z) \in \mathcal{S}_0$ entonces $f(z) = (a, \mu)(z^{-1}) \in \mathcal{T}$ con

$$f(A) = a + \int_{]0,\infty[} A_t \, d\mu(t),$$

donde la integral es convergente en $\mathcal{L}(X)$. Por tanto, considerando la notación introducida en el teorema 3.5, $f(A) \in \overline{\mathcal{L}} \subseteq (\mathcal{L}^c)^c$, y razonando como en el citado resultado, pero teniendo presente que $A \notin \mathcal{L}(X)$,

$$\sigma(f(A)) = \{a + \int_{]0,\infty[} \frac{s}{1+st} \, d\mu(t) : s \in \sigma(A)\} \cup \{a + \int_{]0,\infty[} \frac{1}{t} \, d\mu(t)\},$$

siendo válida la última igualdad por el hecho de que las formas lineales conmutan con la integral si $u(A_t)$ es $\mu(t)$-integrable, lo que sucede para todas las $u \in \mathcal{K}$.

(iii) Por la elección de f sabemos (ver teorema 3.6) que $f(A)$ es no negativo con $f(A)_\lambda = f_\lambda(A)$, $\forall\lambda > 0$. Además, por el corolario 3.3 $f(A) \notin \mathcal{L}(X)$, así que por la proposición 2.7

$$\sigma(f(A)_\lambda) = \{\frac{s}{1+\lambda s} \ : \ s \in \sigma(f(A))\} \cup \{\frac{1}{\lambda}\}.$$

Puesto que por el apartado anterior aplicado a f_λ tenemos

$$\sigma(f_\lambda(A)) = \{f_\lambda(s) \ : \ s \in \sigma(A)\} \cup \{\frac{1}{\lambda}\},$$

se concluye la relación apuntada al igualar $\sigma(f(A)_\lambda)$ con $\sigma(f_\lambda(A))$. ■

Capítulo 4
Potencias fraccionarias de operadores lineales multivaluados.

En el presente capítulo obtenemos una teoría de potencias fraccionarias de operadores lineales multivaluados no negativos para exponentes $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$. Para $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ el Cálculo Funcional construido proporciona la mayoría de las propiedades deseables de una teoría de potencias que pueda calificarse como tal.

Este concepto podría extenderse a exponentes con $\operatorname{Re}\alpha \geq 1$ por aditividad. No obstante, hemos preferido dar una definición global basada en la fórmula de diagonalización, que recordemos relaciona el caso denso con el multivaluado. Este tipo de extensión no es nueva: ya Martínez-Sanz en [MS1] proponen una definición de potencias fraccionarias para operadores univaluados mediante esta técnica. Esta construcción permite utilizar, cuando sea factible, los resultados sobre potencias fraccionarias para operadores no negativos densamente definidos de la que existe una vasta literatura: véanse por ejemplo [Ba], [Ko1], [MSM] y [MS2]. Como veremos, la obtención de algunos resultados importantes pasará inevitablemente por el Cálculo Operacional propuesto en el capítulo anterior, esencialmente debido a que es necesario "salirse" del ámbito de los operadores densamente definidos.

La ampliación de la teoría a exponentes con $\operatorname{Re}\alpha < 0$ se realiza, como era presumible, mediante la relación $A^\alpha = (A^{-1})^{-\alpha}$.

4.1 Construcción de las potencias fraccionarias. Aditividad.

Definición 4.1 *Sean* $\alpha \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *y* $A \in \mathcal{M}$. *Llamaremos* ***potencia fraccionaria base*** A ***y de exponente*** α *al operador lineal* A^α *determinado por*

$$D(A^\alpha) = \{u \in \overline{D(A)} : (1+A)^{-1}u \in D(A_D{}^\alpha) \text{ y } A_D{}^\alpha(1+A)^{-1}u \in D(A)\},$$

$$A^\alpha u = (1+A)\,A_D{}^\alpha\,(1+A)^{-1}u, \quad \forall u \in D(A^\alpha).$$

Nota 4.1 Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ con $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. Como comentamos en el ejemplo 3.2

$$z^\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{-\alpha}\frac{z}{1+tz}\,dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-.$$

Por tanto, la función está en la clase $\mathcal{T}_0$ (incluso en $\mathcal{T}_+$ si α es real). Por el teorema 3.5 para $A \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{M}$ tenemos

$$A^\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{-\alpha}A_t\,dt = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}A\,dt.$$

Siguiendo la construcción del Cálculo Funcional, para $A \in \mathcal{M}$ se puede definir

$$A^\alpha = \liminf_{\lambda\to 0}\,(A_\lambda)^\alpha.$$

Por el teorema 3.10 se tiene

$$\begin{aligned} A^\alpha &= (1+A)\,A_D{}^\alpha(1+A)^{-1}\,|_{\overline{D(A)}} \\ &= \frac{sen\,\alpha\pi}{\pi}\,\Big(\int_1^\infty t^{-\alpha}A_t\,dt + A\int_0^1 t^{-\alpha}J_t^A\,dt\,|_{\overline{D(A)}}\Big), \end{aligned}$$

que coincide con la definición dada.

El Cálculo Funcional proporciona directamente una serie de propiedades que enunciamos en el teorema siguiente.

Teorema 4.1 *Sean* $A \in \mathcal{M}$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta \in]0,1[$. *Se cumplen las propiedades que relacionamos a continuación:*

(i) *A^α es un operador cerrado con*

$$A^\alpha 0 = A0, \quad \operatorname{Ker} A^\alpha = \operatorname{Ker} A,$$

$$D(A) \subseteq D(A^\alpha) \subseteq \overline{D(A)} \quad y \quad R(A) \subseteq R(A^\alpha) \subseteq \overline{R(A)}.$$

(ii) *$D(A^\alpha) = D((A+\epsilon)^\alpha)$, $\forall \epsilon > 0$, y*

$$A^\alpha = \liminf_{\epsilon \to 0} (A+\epsilon)^\alpha.$$

(iii) *$A \in \mathcal{L}(X)$ si, y sólo si, $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$.*

(iv) *El operador univaluado*

$$W_\alpha(A) = \{(u, \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha} A_t u \, dt) \in X \times X : u \in D(A)\},$$

es cerrable con

$$\overline{W_\alpha(A)} = A^\alpha{}_D = A_D{}^\alpha.$$

En particular, si A es densamente definido entonces $A^\alpha = \overline{W_\alpha(A)}$. Además, si $\overline{D(A)} \subsetneq X$ entonces $A_D{}^\alpha \subsetneq A^\alpha$.

(v) *Si* $\operatorname{Im} \alpha = 0$ *entonces $A^\alpha \in \mathcal{M}$ con*

$$J_\lambda^{A^\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda\, t^\alpha}{1 + 2\lambda t^\alpha \cos \alpha\pi + \lambda^2 t^{2\alpha}} (t+A)^{-1} \, dt, \quad \forall \lambda > 0,$$

y $M(A^\alpha) \le M(A)$.

(vi) *$A^\alpha (J_\lambda^A)^\alpha u = (A_\lambda)^\alpha u + A0$, $\forall u \in X$, y $(J_\lambda^A)^\alpha A^\alpha u = (A_\lambda)^\alpha u$, $\forall u \in D(A^\alpha)$.*

(vii) *Si* $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \beta = 0$ *entonces para todo $a, b \ge 0$ se tiene que*

$$a\, A^\alpha + b\, A^\beta \in \mathcal{M}.$$

(viii) *Para toda sucesión $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $]0,1]$ con límite $\alpha > 0$ se cumple*

$$A^\alpha = \liminf_{n \to \infty} A^{\alpha_n}.$$

(ix) $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha$.

(x) $(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*$.

(xi) *Si* $\mathrm{Im}\ \alpha = 0$ *entonces* $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$.

(xii) *Si* $\mathrm{Re}\,(\alpha + \beta) < 1$ *entonces*

$$A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta},$$

y por consiguiente $D(A^\alpha) \subseteq D(A^\beta)$ *siempre que* $\mathrm{Re}\ \beta \leq \mathrm{Re}\ \alpha$.

(xiii) $A = A^\alpha A^{1-\alpha} = A^{1-\alpha} A^\alpha$. *La propiedad anterior es válida bajo la condición* $\mathrm{Re}\,(\alpha + \beta) \leq 1$

(xiv) *Si* $A \in \mathcal{L}(X)$ *entonces*

$$\sigma(A^\alpha) = \{z^\alpha : z \in \sigma(A)\}, \tag{4.1}$$

mientras que cuando $A \notin \mathcal{L}(X)$, *si* $\mathrm{Im}\ \alpha = 0$ *se tiene* (4.1) *y en otro caso se da, al menos, la inclusión* $\supseteq$ *de la citada igualdad.*

Nota 4.2 La propiedad (xiii) es la que nos permitiría extender por aditividad el concepto de potencia fraccionaria a exponentes $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\,\alpha \geq 1$. Obsérvese que siguiendo este proceso, si elegimos un natural n con $n > \mathrm{Re}\,\alpha > 0$, entonces es fácil convencerse de la validez de las siguientes igualdades:

$$A^\alpha = (A^{\frac{\alpha}{n}})^n = (1+A)^n A_D{}^\alpha (1+A)^{-n} |_{\overline{D(A)}} = (1+A) A_D{}^\alpha (1+A)^{-1} |_{\overline{D(A)}},$$

llegándose de nuevo a la definición propuesta.

Teorema 4.2 *Sean* $A \in \mathcal{M}$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$ *con* $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$. *Se tiene que* A^α *es un operador cerrado.*

Demostración. Sea $\underline{\{(u_n, v_n)\}}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A^α convergente a (u, v). De entrada $u \in \overline{D(A)}$. Puesto que

$$(1 + A)^{-1} u_n \xrightarrow{n} (1 + A)^{-1} u$$

$$A_D{}^{\alpha}(1+A)^{-1}u_n = (1+A)^{-1}v_n \xrightarrow{n} (1+A)^{-1}v$$

y es $A_D{}^{\alpha}$ cerrado, entonces $(1+A)^{-1}u \in D(A_D{}^{\alpha})$ y

$$A_D{}^{\alpha}(1+A)^{-1}u = (1+A)^{-1}v \in D(A),$$

teniéndose por tanto que $(u, v) \in A^{\alpha}$. ∎

El resultado clave para comprobar que se dispone de una teoría satisfactoria de potencias es la aditividad que nos permitirá, cuando sea necesario, recurrir a la teoría proporcionada por el Cálculo Funcional para exponentes α con $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. Necesitamos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 4.1 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $A \in \mathcal{M}$. Si $u \in D(A_D{}^{\alpha})$ y existe algún $z \in \mathbb{C}$ con $zu - A_D{}^{\alpha}u \in D(A)$ entonces $u \in D(A_D)$.*

Demostración. Supongamos primer lugar que $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. Determinamos n entero positivo de forma que si $\beta = (1-\alpha)/n$ entonces $\operatorname{Re}\beta < \operatorname{Re}\alpha$. En particular $D(A_D{}^{\alpha}) \subseteq D(A_D{}^{\beta})$. Como por la propiedad (iv) del teorema 4.1

$$zu - A_D{}^{\alpha}u \in D(A) \subseteq D(A^{\beta}{}_D) = D(A_D{}^{\beta}),$$

entonces $A_D{}^{\alpha}u \in D(A_D{}^{\beta})$, de donde, utilizando la aditividad

$$u \in D(A_D{}^{\alpha+\beta}) \subseteq D(A_D{}^{2\beta}).$$

Repitiendo el argumento n veces concluimos que $u \in D(A_D{}^{\alpha+n\beta}) = D(A_D)$.

Si $\operatorname{Re}\alpha \geq 1$ elegimos $\beta \in \mathbb{C}$ con $0 < \operatorname{Re}\beta < 1$. Razonando como anteriormente se tiene $A_D{}^{\alpha}u \in D(A_D{}^{\beta})$ y de nuevo por aditividad

$$u \in D(A_D{}^{\alpha+\beta}) = D(A_D{}^{\alpha+\beta-1}A_D) \subseteq D(A_D).$$

∎

Teorema 4.3 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $\operatorname{Re}\beta > 0$. Entonces*

$$A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\beta}A^{\alpha} = A^{\alpha+\beta}.$$

Demostración. La relación

$$A^\alpha A^\beta u = A^{\alpha+\beta}u, \quad \forall u \in D(A^\alpha A^\beta),$$

es inmediata a partir de la definición dada y de la aditividad para el caso de dominio denso.

Para probar la igualdad $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ basta con comprobar la inclusión de dominios $D(A^{\alpha+\beta}) \subseteq D(A^\alpha A^\beta)$, ya que $A^\alpha A^\beta 0 = A0 = A^{\alpha+\beta}0$. Sea $u \in D(A^{\alpha+\beta})$; por definición

$$(1+A)^{-1}u \in D({A_D}^{\alpha+\beta}) = D({A_D}^\alpha\, {A_D}^\beta)$$

y

$${A_D}^\alpha\, {A_D}^\beta(1+A)^{-1}u \in D(A).$$

Por el lema 4.1 tenemos que

$${A_D}^\beta(1+A)^{-1}u \in D(A_D),$$

luego $u \in D(A^\beta)$ y existe $w \in A^\beta u \cap \overline{D(A)}$. Es ya sencillo asegurar que $w \in D(A^\alpha)$ y, por consiguiente, $u \in D(A^\alpha A^\beta)$. ■

Teorema 4.4 *Para $A \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ con* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *y* $0 < \beta < 1$, *se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) $A^n = A \dots A$ *(n veces).*

(ii) $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha$.

(iii) $\overline{D(A^\alpha)} = \overline{D(A)}$, $\overline{R(A^\alpha)} = \overline{R(A)}$, $A^\alpha 0 = A0$ *y* $\operatorname{Ker} A^\alpha = \operatorname{Ker} A$.

(iv) $A \in \mathcal{L}(X)$ *si, y sólo si,* $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$.

(v) *Si* $\overline{D(A)} \subsetneq X$ *entonces* A^α *es una extensión estricta de* ${A_D}^\alpha$.

(vi) $(A^\beta)^\alpha = A^{\alpha\beta}$.

Demostración. (i) Por inducción sobre n. Si $n = 1$ el resultado es evidente. Si el resultado es válido para n entonces por aditividad

$$A^{n+1} = A^n\, A = A \dots A \,(n+1 \text{ veces}).$$

(ii) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > \mathrm{Re}\ \alpha$. Por aditividad y la propiedad (ix) del teorema 4.1 se tiene:

$$(A^\alpha)^{-1} = ((A^{\alpha/n})^n)^{-1} = ((A^{\alpha/n})^{-1})^n = ((A^{-1})^{\alpha/n})^n = (A^{-1})^\alpha.$$

(iii) Si $n \in \mathbb{N}$ verifica $n > \mathrm{Re}\ \alpha$, entonces, por aditividad y la proposición 2.6,

$$D(A^n) \subseteq D(A^\alpha) \subseteq \overline{D(A)} = \overline{D(A^n)}.$$

La igualdad $A^\alpha 0 = A0$ es trivial. Las otras dos relaciones son consecuencia de aplicar las ya probadas a A^{-1} y tener presente el apartado precedente.

(iv) Es inmediato que si $A \in \mathcal{L}(X)$ entonces $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$. Recíprocamente, supongamos que $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$. Si $\mathrm{Re}\,\alpha < 1$ el resultado es conocido ((iii) del teorema 4.1). Si $\mathrm{Re}\,\alpha = 1$ entonces $X = D(A^\alpha) \subseteq D(A^{1/2})$ con lo que $A^{1/2} \in \mathcal{L}(X)$ y por tanto $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$ entonces $X = D(A^\alpha) \subseteq D(A)$, de donde, al ser A cerrado, $A \in \mathcal{L}(X)$.

(v) Si A es multivaluado es evidente, mientras que en el caso univaluado es conocida la citada propiedad (se prueba a partir de la proposición 2.5 propiedad (vi)).

(vi) Obsérvese que la propiedad tiene sentido plantearla ya que $A^\beta \in \mathcal{M}$ ((v) del teorema 4.1). Para la demostración utilícese de nuevo un argumento de aditividad junto con el apartado (xi) del citado teorema.

∎

Proposición 4.1 *Sea $A \in \mathcal{M}$ con $D(A) \subsetneq \overline{D(A)}$. Si $0 < \mathrm{Re}\,\beta < \mathrm{Re}\,\alpha$ entonces*

$$D(A^\alpha) \subsetneq D(A^\beta).$$

Demostración. En primer término nótese que la condición $R(A) \subseteq D(A)$ implica $D(A) = X$, ya que si $u \in X$ entonces $A_1 u \in D(A)$, de donde $u \in D(A)$.

De la aditividad tenemos $D(A^\alpha) \subseteq D(A^\beta)$. Si los dos conjuntos fueran iguales para $u \in D(A^\alpha)$ de nuevo por la aditividad se tendría que $A^\alpha u = A^\beta A^{\alpha-\beta} u$, luego

$$u \in D(A^{2\alpha-\beta}) \subseteq D(A^{2(\alpha-\beta)}).$$

Mediante un proceso de inducción se concluye

$$u \in D(A^{n(\alpha-\beta)}), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y de ello se deduce por la aditividad que $D(A) = D(A^2)$. En consecuencia, $D(A_D) = \overline{D(A)}$ y $R(A_D) \subseteq D(A_D)$. Por esta última relación tenemos $D(A_D) = \overline{D(A)}$, lo que contradice la elección de A. ■

Nota 4.3 Respecto de la condición exigida al dominio del operador, obsérvese que en el caso univaluado equivalen $D(A)$ cerrado y $A \in \mathcal{L}(X)$, lo que evidentemente no es cierto cuando A es multivaluado. En este caso no es válida la anterior propiedad si el dominio de A es cerrado. Basta por ejemplo considerar el operador $A = \{0\} \times X$, para el que $A^\alpha = A$ cualquiera que sea el exponente α.

4.2 Teorema de la aplicación espectral.

Del Cálculo Funcional no se deduce directamente, de forma completa, el teorema de la aplicación espectral para el caso de exponentes complejos con parte imaginaria no nula y parte real entre cero y uno.

En el siguiente teorema utilizamos las ideas expuestas por Balakrishnan en [Ba] para demostrar el citado resultado. La prueba se basa fuertemente en la estructura de álgebra de Banach de $\mathcal{L}(X)$ con X un espacio de Banach, por lo que no es exportable a espacios más generales.

Posteriormente, utilizando la fórmula de diagonalización, daremos otra prueba alternativa apoyada en el caso denso para el que Martínez-Sanz en [MS2] dan una prueba basada exclusivamente en representaciones integrales de la resolvente, y no en la estructura de álgebra de Banach citada. Estas representaciones integrales se extienden a nuestra situación, y nos permitirán en la sección siguiente extender la multiplicatividad a exponentes reales más grandes.

Teorema 4.5 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $A \in \mathcal{M}$. Si $\sigma(A)$ es vacío lo mismo le sucede a $\sigma(A^\alpha)$, mientras que en otro caso se tiene la relación*

$$\sigma(A^\alpha) = \{z^\alpha : z \in \sigma(A)\}.$$

Demostración. Evidentemente podemos situarnos directamente en el caso $A \notin \mathcal{L}(X)$. Comenzaremos probando el resultado cuando $|\alpha|^2 <$

$\operatorname{Re}\alpha$. Teniendo presente el ejemplo (3.1), y si tomamos $-\gamma \in \Omega_\alpha$, entonces por la proposición 3.5 se obtiene:

$$(4.2)\quad (\gamma + z^\alpha)^{-1}(A) = \frac{1}{\gamma} + \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+2\gamma t^\alpha \cos\alpha\pi + \gamma^2 t^{2\alpha}} A_t\, dt,$$

y es un operador de $\mathcal{L}(X)$. Por el teorema 3.12 $(\gamma + z^\alpha)^{-1}(A) = (\gamma + A^\alpha)^{-1}$. A partir de las igualdades

$$A^\alpha - z = (\gamma + A^\alpha)\,(1-(z+\gamma)\,(\gamma+A^\alpha)^{-1}) = (1-(z+\gamma)\,(\gamma+A^\alpha)^{-1})\,(\gamma+A^\alpha),$$

válidas para todo $z \in \mathbb{C}$, se prueba que $A^\alpha - z$ tiene inverso en $\mathcal{L}(X)$ si, y sólo si, $(1-(z+\gamma)\,(\gamma+A^\alpha)^{-1})$ tiene inverso en $\mathcal{L}(X)$, es decir,

$$z \in \sigma(A^\alpha) \Leftrightarrow z + \gamma \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{z+\gamma} \in \sigma((\gamma + A^\alpha)^{-1}).$$

Por el teorema 3.14 tenemos que

$$\sigma((\gamma + A^\alpha)^{-1}) = \{\frac{1}{\gamma + s^\alpha} : s \in \sigma(A)\} \cup \{0\},$$

de donde se deduce el resultado deseado.

Para el caso general es obvio que podemos determinar un entero positivo n de forma que α/n esté en las condiciones previas, con lo que se tiene:

$$\sigma(A^\alpha) = \sigma((A^{\frac{\alpha}{n}})^n) = \{\, s^n : s \in \sigma(A^{\frac{\alpha}{n}})\} = \{\, s^\alpha : s \in \sigma(A)\},$$

donde la primera identidad es consecuencia de la aditividad, la segunda de la proposición 2.1 y la tercera del caso ya demostrado. ■

Proposición 4.2 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $A \in \mathcal{M}$. Se cumplen las relaciones:*

$$A_D{}^\alpha = A^\alpha{}_D, \quad \rho(A^\alpha) = \rho(A_D{}^\alpha) \text{ y}$$

$$(4.3)\quad (z - A^\alpha)^{-1} = (1 + A_D)\,(z - A_D{}^\alpha)^{-1}(1+A)^{-1}, \quad \forall z \in \rho(A^\alpha).$$

Demostración. Sea $u \in D(A_D{}^\alpha) \subseteq \overline{D(A)}$; entonces

$$A_D{}^\alpha(1+A)^{-1}u = (1+A_D)^{-1}\, A_D{}^\alpha u \in D(A_D{}^\alpha),$$

de donde $u \in D(A^\alpha{}_D)$ y $A_D{}^\alpha u = A^\alpha{}_D u$. Consideremos ahora $u \in D(A^\alpha{}_D)$; esta condición implica que $(1+A)^{-1}u \in D(A_D{}^{\alpha+1})$, por lo que al estar u en $\overline{D(A)}$ se puede afirmar que $u \in D(A_D{}^\alpha)$. Queda pues probada la primera igualdad.

Sea $z \in \rho(A^\alpha)$. Es evidente que $z - A_D{}^\alpha$ es inyectivo ya que $z - A^\alpha$ lo extiende y es inyectivo. Sea $w \in \overline{D(A)}$; por ser $z - A^\alpha$ suprayectivo existe $(u,v) \in A^\alpha$ tal que $w = zu - v$. Por tanto $v \in \overline{D(A)}$, de donde, teniendo presente que $A^\alpha{}_D = A_D{}^\alpha$, se deduce que $(u,v) \in A_D{}^\alpha$ y $w = zu - A_D{}^\alpha u$, es decir, $z - A_D{}^\alpha$ es suprayectivo. Como es un operador cerrado, por el teorema de la gráfica cerrada se tiene que $(z - A_D{}^\alpha)^{-1} \in \mathcal{L}(X_D)$, esto es, $z \in \rho(A_D{}^\alpha)$.

Por otra parte, si $z \in \rho(A_D{}^\alpha)$, entonces $z - A^\alpha$ es inyectivo, pues si existe $(u,v) \in A^\alpha$ con $0 = zu - v$, entonces $(u,v) \in A_D{}^\alpha$, de donde $u = 0$. Comprobemos que es suprayectivo. Sea $u \in X$; consideramos el elemento

$$v = (z - A_D{}^\alpha)^{-1}(1+A)^{-1}u \in D(A_D{}^\alpha).$$

Como $zv - A_D{}^\alpha v \in D(A)$ entonces del lema 4.1 se sigue que $v \in D(A_D)$. Podemos por tanto elegir $w \in (1+A)v \cap \overline{D(A)}$ y entonces

$$A_D{}^\alpha(1+A)^{-1}w = zv - (1+A)^{-1}u \in D(A),$$

es decir, $w \in D(A^\alpha)$ y

$$\begin{aligned}(z - A^\alpha)w &= zw - (1+A)\,A_D{}^\alpha\,(1+A)^{-1}w \\ &= zw + (1+A)\left((1+A)^{-1}u - zv\right) \ni u,\end{aligned}$$

luego $z - A^\alpha$ es suprayectivo, y al ser cerrado se deduce, como queríamos, que $z \in \rho(A^\alpha)$. Es ya evidente que se verifica la relación (4.3). ∎

Nota 4.4 Como anticipábamos, disponemos de una prueba alternativa del teorema de la aplicación espectral. En efecto, para cerciorarse de ello basta tener en cuenta el teorema espectral para el caso denso y la proposición anterior que relaciona los espectros de A^α y de $A_D{}^\alpha$.

Corolario 4.1 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, con $|\alpha|^2 < \operatorname{Re}\alpha$, y $A \in \mathcal{M}$. Se verifican las siguientes fórmulas integrales:*

(i) *Si* $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{\lambda^\alpha e^{i\theta\alpha} : \lambda > 0,\ -\pi \leq \theta \leq \pi\}$ *entonces*

$$(z - A^\alpha)^{-1} = -\frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{z^2 - 2\, z\, t^\alpha \cos \alpha\pi + t^{2\alpha}} (t + A)^{-1}\, dt.$$

(ii) *Si* $z = s^\alpha$, *con* $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \cap \rho(A)$, *entonces*

$$\begin{aligned}(z - A^\alpha)^{-1} &= \frac{1}{\alpha} s^{1-\alpha} (s - A)^{-1} \\ &\quad -\frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{s^{2\alpha} - 2\, s^\alpha\, t^\alpha \cos \alpha\pi + t^{2\alpha}} (t + A)^{-1}\, dt.\end{aligned}$$

(iii) *Si* $r > 0$ *entonces*

$$(r^\alpha\, e^{\pm i\alpha\pi} - A^\alpha)^{-1} = r^{-\alpha}\, e^{\pm i\alpha\pi}\, J^A_{\frac{1}{r}} + \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi}$$
$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-2}\,(r - t)}{(t^\alpha - r^\alpha)\,(t^\alpha - e^{\pm 2i\alpha\pi}\, r^\alpha)} (1 - J^A_{\frac{1}{r}})\, J^A_{\frac{1}{t}}\, dt.$$

Demostración. La relación (4.3) junto con que las representaciones integrales son válidas para operadores densamente definidos (véase [MS2]) y con que A_D es cerrado, conducen de forma sencilla a las igualdades apuntadas. ■

Recuérdese que el apartado (i) ya se obtuvo en el teorema 4.5.

4.3 Sectorialidad de A^α. Extensión de la multiplicatividad.

En la sección 4.1 se obtuvo la relación $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ para $\operatorname{Re}\beta > 0$ y $0 < \alpha < 1$, siendo la última restricción suficiente para que $A^\alpha \in \mathcal{M}$ y tener así la certeza de que tiene sentido construir $(A^\alpha)^\beta$. Ya en el caso univaluado es conocido que si $\alpha > 1$ no se tiene asegurada la no negatividad de A^α por lo que no tiene sentido el operador $(A^\alpha)^\beta$. Esto es cierto debido a que se puede construir un operador A no negativo que tenga en su espectro un punto con argumento $\frac{\pi}{\alpha}$, de modo que, por el teorema de la aplicación espectral, $A^\alpha \notin \mathcal{M}$. De hecho, para cada subconjunto cerrado C de la clausura de un sector $S_\omega = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \omega\} \cup \{0\}$, con $\omega \in [0,\pi[$, se puede obtener un operador no negativo cuyo espectro sea C (véase [MS2]).

Vamos a probar que si A es $\omega-$sectorial (véase la definición 2.4) la multiplicatividad se puede extender a exponentes $\alpha > 0$ verificando la condición $\alpha\,\omega \leq \pi$. Esta cuestión ha sido ampliamente tratada en el caso univaluado (véanse [Ba], [BBD], [Ko2] y [MS2]).

Proposición 4.3 *Si $A \subseteq X \times X$ es $\omega-$sectorial con $\omega \in [0,\pi]$ y $\alpha > 0$ verifica $\alpha\,\omega \leq \pi$, entonces A^α es $\alpha\omega-$sectorial.*

Demostración. Por el teorema de la aplicación espectral tenemos que $\sigma(A^\alpha) \subseteq S_{\alpha\omega}$. Por el lema 2.2 sólo resta comprobar que para cada θ fijo, con $\alpha\omega \leq |\theta| \leq \pi$, los operadores $\lambda(\lambda e^{i\theta} - A^\alpha)^{-1}$, $\lambda > 0$, son uniformemente acotados.

Comenzaremos asumiendo que $\alpha < 1$, por lo que son válidas las representaciones integrales del corolario 4.1. Sea $M = \sup_{z \notin S_\omega} \|z(z-A)^{-1}\|$. Si $\alpha\pi < |\theta| \leq \pi$ entonces por el apartado (i) del citado corolario, tras hacer el cambio de variable $t = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} r$, tenemos la acotación uniforme respecto de $\lambda > 0$ siguiente:

$$\lambda \left\|(\lambda e^{i\theta} - A^\alpha)^{-1}\right\| \leq \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi} M \int_0^\infty \frac{r^{\alpha-1}}{|r^{2\alpha} - 2\,r^\alpha e^{i\theta}\cos\alpha\pi + e^{2i\theta}\,|}\,dr.$$

Si $|\theta| = \alpha\pi$ entonces por (ii) del corolario al que hemos hecho referencia

$$\lambda \left\|(\lambda e^{i\theta} - A^\alpha)^{-1}\right\| \leq M + \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi} M\,(M+1)(I_1(\theta) + I_2(\theta)), \quad \forall\lambda > 0,$$

donde

$$I_1(\theta) = \int_0^1 (1-s)\,\frac{s^{\alpha-1}}{(1-s^\alpha)\,|s^\alpha - e^{\pm 2i\alpha\pi}\,|}\,ds, \text{ e}$$

$$I_2(\theta) = \int_1^\infty \frac{s-1}{s}\,\frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - 1)\,|s^\alpha - e^{\pm 2i\alpha\pi}\,|}\,dt.$$

Para finalizar, si $\alpha\omega \leq |\theta| < \alpha\pi$ entonces $\lambda e^{i\theta} = s^\alpha$ para $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \cap \rho(A)$, luego $\forall\lambda > 0$ se tiene:

$$\lambda \left\|(\lambda e^{i\theta} - A^\alpha)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi} M \int_0^\infty \frac{r^{\alpha-1}}{|r^{2\alpha} - 2\,r^\alpha e^{i\theta}\cos\alpha\pi + e^{2i\theta}\,|}dr.$$

Para el caso general determinamos $n \in \mathbb{N}$ con $n > \alpha$. Sea $z \notin S_{\alpha\omega}$. Sean z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, las raíces n-ésimas de z. Por la fórmula del producto para polinomios (véase el teorema 2.1) aplicada al operador $A^{\frac{\alpha}{n}}$ y tras tomar inversos tenemos:

$$\left\| z(z - A^{\alpha})^{-1} \right\| = \left\| z(z - (A^{\frac{\alpha}{n}})^{n})^{-1} \right\| \leq \prod_{k=1}^{n} \left\| z_k(z_k - A^{\frac{\alpha}{n}})^{-1} \right\|,$$

de donde, observando que $z_k \notin S_{\frac{\alpha\omega}{n}}$ y que por el caso anterior $A^{\frac{\alpha}{n}}$ es $\frac{\alpha\omega}{n}$-sectorial, se deduce la acotación uniforme que necesitábamos para poder afirmar que A^{α} es $\alpha\omega-$sectorial. ∎

Teorema 4.6 *Sea $\beta \in \mathbb{C}$ con* Re $\beta > 0$. *Si $A \subseteq X \times X$ es $\omega-$sectorial con $\omega \in [0, \pi]$ y $\alpha > 0$ verifica $\alpha\omega \leq \pi$, entonces $A^{\alpha} \in \mathcal{M}$ y*

$$(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha\beta}.$$

Demostración. Por la proposición anterior A^{α} es $\alpha\omega-$sectorial y en consecuencia es no negativo. Por tanto, es susceptible de ser considerado base de potencias fraccionarias. Tenemos:

$$\begin{aligned}
(A^{\alpha})^{\beta} &= (1 + A^{\alpha})({A^{\alpha}}_D)^{\beta}(1 + A^{\alpha})^{-1} \mid_{\overline{D(A)}} \\
&= (1 + A^{\alpha})\, {A_D}^{\alpha\beta}\, (1 + A^{\alpha})^{-1} \mid_{\overline{D(A)}} \\
&= (1 + A)(1 + {A_D}^{\alpha})(1 + A)^{-1} {A_D}^{\alpha\beta} \\
&\quad\ (1 + A_D)(1 + {A_D}^{\alpha})^{-1}(1 + A)^{-1} \mid_{\overline{D(A)}},
\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de que la propiedad que deseamos probar es cierta para operadores densamente definidos y de la proposición 4.2. Como $(1 + A)^{-1}$ conmuta con ${A_D}^{\alpha\beta}$ sobre su dominio, y por aditividad también conmutan $(1 + {A_D}^{\alpha})$ y ${A_D}^{\alpha\beta}$, entonces llegamos a que

$$(A^{\alpha})^{\beta} = (1 + A)\, {A_D}^{\alpha\beta}\, (1 + A)^{-1} \mid_{\overline{D(A)}} = A^{\alpha\beta}.$$

∎

Nota 4.5 Es conocido que el resultado previo sin limitación sobre el exponente α no es en general cierto. K. Yosida en [Yo] propone el operador $Au = iu'$, $u \in L^2(\mathbb{R})$, para el que

$$(A^2)^{\frac{1}{2}} \neq A.$$

En las condiciones del teorema anterior, $\frac{\pi}{\omega}$ es el máximo valor del exponente α para el que podemos asegurar siempre que $A^\alpha \in \mathcal{M}$. Para convencerse de la certeza de esta afirmación, basta considerar la técnica expuesta al comienzo de esta sección.

4.4 Potencias fraccionarias del operador adjunto.

Esta sección la dedicamos a establecer una conexión entre los operadores $(A^*)^\alpha$ y $(A^\alpha)^*$. El resultado que obtenemos sólo era conocido para operadores densamente definidos (véanse [MS1] o [Ko3] donde se define directamente la potencia del adjunto como $(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*$); por otra parte únicamente para este tipo de operadores tenía sentido plantearse el citado problema. Recuérdese que el Cálculo Funcional proporciona la igualdad de ambos operadores cuando $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$.

Lema 4.2 *Sean $A \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $u \in X$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $(A_1)^n u \in D(A^\alpha)$ entonces $u \in D(A^\alpha)$.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n. Si $A_1 u \in D(A^\alpha)$ entonces

$$A_1 u \in AJ_1^A u \cap D(A^\alpha),$$

por lo que

$$J_1^A u \in D(A^{\alpha+1}) \subseteq D(A^\alpha),$$

luego $u \in D(A^\alpha)$. Supongamos el resultado válido para n. Si $(A_1)^{n+1}u \in D(A^\alpha)$ entonces por el caso $n = 1$ tenemos $(A_1)^n u \in D(A^\alpha)$ y, por hipótesis de inducción, se sigue que $u \in D(A^\alpha)$. ∎

Teorema 4.7 *Sea $A \in \mathcal{M}$ con $A0 + \overline{D(A)} = X$ o $\operatorname{Ker} A + \overline{R(A)} = X$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Se cumple:*

$$(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > \mathrm{Re}\,\alpha$. Por la aditividad y las propiedades del adjunto

$$(A^*)^\alpha = ((A^*)^{\alpha/n})^n = ((A^{\alpha/n})^*)^n \subseteq (A^\alpha)^*.$$

Además

$$(A^*)^\alpha 0 = A^* 0 = \overline{D(A)}^\perp = \overline{D(A^\alpha)}^\perp = (A^\alpha)^* 0,$$

luego sólo queda por comprobar que $D((A^\alpha)^*) \subseteq D((A^*)^\alpha)$.

Asumamos que $A0 + \overline{D(A)} = X$ y comencemos demostrando que

$$(A^\alpha)^* 0 \cap \overline{D((A^\alpha)^*)} = \{0\}.$$

Sea $u^* \in (A^\alpha)^* 0 \cap \overline{D((A^\alpha)^*)}$. Entonces

$$\langle u^*, u \rangle = 0, \quad \forall u \in \overline{D(A)},$$

y existe una sucesión $\{(u_n^*, v_n^*)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $(A^\alpha)^*$ con $\lim_{n\to\infty} u_n^* = u^*$ y

$$\langle v_n^*, u \rangle = \langle u_n^*, v \rangle\,, \quad \forall (u,v) \in D(A^\alpha).$$

Como

$$\langle u_n^*, w \rangle = 0, \quad \forall w \in A0 = A^\alpha 0,$$

entonces u^* también se anula sobre $A0$, con lo que $u^* = 0$ por la hipótesis sobre A.

Sea $u^* \in D((A^\alpha)^*)$. Observemos en primer lugar que $J_1^{A^*}$ conmuta con $(A^\alpha)^*$. En efecto, al conmutar J_1^A con A^α, es decir, $J_1^A\, A^\alpha \subseteq A^\alpha J_1^A$, y tener $J_1^A \in \mathcal{L}(X)$ obtenemos:

$$J_1^{A^*}\,(A^\alpha)^* \subseteq (A^\alpha J_1^A)^* \subseteq (J_1^A A^\alpha)^* = (A^\alpha)^*\, J_1^{A^*}.$$

Así,

$$\begin{aligned}(A_1^*)^n u^* &\in (A^*)^n (J_1^{A^*})^n u^* = (A^*)^{n-\alpha} (A^*)^\alpha (J_1^{A^*})^n u^* \\ &= (A^*)^{n-\alpha} (J_1^{A^*})^n (A^\alpha)^* u^*,\end{aligned}$$

por lo que existe $w^* \in A^* 0$ de tal forma que

$$v^* = (A_1^*)^n u^* + w^* \in D((A^*)^\alpha).$$

Como $(A_1^*)^n u^* = u^* + x^*$ con $x^* \in D(A^*) \subseteq \overline{D((A^*)^\alpha)} \subseteq \overline{D((A^\alpha)^*)}$ podemos afirmar que

$$w^* \in (A^\alpha)^* 0 \cap \overline{D((A^\alpha)^*)} = \{0\},$$

por lo que $(A_1^*)^n u^* \in D((A^*)^\alpha)$, y por el lema anterior se concluye que $u^* \in D((A^*)^\alpha)$.

Si se verifica la relación $\operatorname{Ker} A + \overline{R(A)} = X$ entonces A^{-1} está en las condiciones anteriores, luego

$$((A^{-1})^*)^\alpha = ((A^{-1})^\alpha)^*,$$

de donde, teniendo en cuenta que la operación de tomar inverso conmuta con las de tomar adjunto y elevar al exponente α, se deduce el resultado buscado. ∎

Nota 4.6 Recuérdese que la condición exigida al operador en el teorema anterior se verifica si el espacio X es **reflexivo** (proposición 2.10). Obviamente las hipótesis del teorema incluyen los casos de dominio o rango denso.

Repasando la anterior demostración queda claro que en general se tiene la relación

$$(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^* \mid_{\overline{D(A^*)}},$$

permaneciendo como problema abierto la cuestión de dilucidar si la restricción a $\overline{D(A^*)}$ es innecesaria, como ha sucedido bajo la hipótesis del teorema previo, o como ocurre cuando $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$.

4.5 Potencias fraccionarias de exponente α con $\operatorname{Re}\alpha < 0$.

Definición 4.2 *Sean $A \in \mathcal{M}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\alpha < 0$. Definimos la **potencia fraccionaria de base A y exponente** α como:*

$$A^\alpha = (A^{-1})^{-\alpha} = (1 + A^{-1})\,(A_R)^\alpha (1 + A^{-1})^{-1} \mid_{\overline{R(A)}}.$$

Teorema 4.8 *Sea* $A \in \mathcal{M}$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re} \alpha$, $\operatorname{Re} \beta < 0$. *Se tiene:*

(i) $A^\alpha 0 = \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} A^\alpha = A0$, $\overline{D(A^\alpha)} = \overline{R(A)}$ *y* $\overline{R(A^\alpha)} = \overline{D(A)}$.

(ii) A^α *es un operador cerrado.*

(iii) $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha$.

(iv) $(A_R)^\alpha = (A^\alpha)_D$. A^α *es una extensión de* $(A_R)^\alpha$ *si, y sólo si,* $\overline{R(A)} \subsetneq X$.

(v) *Si* A *es* w*-sectorial,* $w \in [0, \pi]$, *y* $0 < |\gamma| \le \frac{\pi}{\omega}$, *entonces* $A^\gamma \in \mathcal{M}$, *y* $\forall \delta \in \mathbb{C}$ *con* $\operatorname{Re} \delta \neq 0$ *se verifica:*

$$(A^\gamma)^\delta = A^{\gamma \delta}.$$

(vi) $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha + \beta}$.

(vii) *Si* $A \in \mathcal{L}(X)$ *entonces*

$$\sigma(A^\alpha) = \begin{cases} \varnothing, & si\ \sigma(A) \setminus \{0\} = \varnothing \\ \{z^\alpha : z \in \sigma(A) \setminus \{0\}\}, & si\ \sigma(A) \setminus \{0\} \neq \varnothing \end{cases},$$

mientras que en otro caso

$$\sigma(A^\alpha) = \begin{cases} \{0\}, & si\ \sigma(A) \setminus \{0\} = \varnothing \\ \{z^\alpha : z \in \sigma(A) \setminus \{0\}\} \cup \{0\}, & si\ \sigma(A) \setminus \{0\} \neq \varnothing \end{cases}.$$

(viii) *Si* $R(A) \subsetneq \overline{R(A)}$ *y* $\operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \beta$, *entonces*

$$D(A^\alpha) \subsetneq D(A^\beta).$$

(ix) *Si* $A0 + \overline{D(A)} = X$ *o* $\operatorname{Ker} A + \overline{R(A)} = X$ *(o incluso si* $\operatorname{Re} \alpha > -1$*) entonces*

$$(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*.$$

Demostración. Todas las propiedades son consecuencia de la definición y de las ya obtenidas en las secciones anteriores; sólo requiere alguna aclaración el apartado (vii). Éste es consecuencia de que para $z \in \mathbb{C}^*$ se verifica la implicación

$$\frac{1}{z} \in \rho(A) \Rightarrow z \in \rho(A^{-1}),$$

pues en la citada situación se tiene

$$(z-A)^{-1} = \frac{1}{z}(1 - \frac{1}{z}(\frac{1}{z} - A)^{-1}) \in \mathcal{L}(X),$$

y del teorema 4.5 de la aplicación espectral que nos permite afirmar: si $\sigma(A^{-1}) = \varnothing$ entonces $\sigma(A^\alpha) = \varnothing$, y en otro caso, $\sigma(A^\alpha) = \{z^{-\alpha} : z \in \sigma(A^{-1})\}$. ■

Nota 4.7 La composición de potencias fraccionarias de la misma base $A \in \mathcal{M}$ y de exponentes con partes reales de signo diferente puede no verificar la aditividad. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\ \beta < 0 < \mathrm{Re}\, \alpha$ y $\mathrm{Re}\,(\beta+\alpha) < 0$. En primer lugar

$$A^\beta A^\alpha 0 = \mathrm{Ker}\, A = A^{\beta+\alpha}0,$$

pero

$$A^\alpha A^\beta 0 = A0,$$

y recuérdese que $A0 \cap \mathrm{Ker}\, A = \{0\}$. Por tanto, no podemos esperar conexión alguna entre $A^\alpha A^\beta$ y $A^{\alpha+\beta}$, a menos que exijamos de A y A^{-1} que sean univaluados. Además,

$$\mathrm{Ker}\, A \subseteq D(A^\beta A^\alpha) \quad \text{y} \quad \mathrm{Ker}\, A \cap D(A^{\beta+\alpha}) = \{0\}.$$

En consecuencia, para relacionar los operadores $A^\beta A^\alpha$ y $A^{\beta+\alpha}$ es necesario suponer que A^{-1} es univaluado. Con esta restricción, por la aditividad, obtenemos:

$$A^\beta A^\alpha = A^{\beta+\alpha} A^{-\alpha} A^\alpha = A^{\beta+\alpha}\,|_{D(A^\alpha)}\,.$$

Bibliografía

[Al1] ELH. ALAARABIOU, Calcul fonctionnel et puissance fractionnaire d'opérateurs linéaires multivoques non négatifs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **313** (1991), Série I, 163-166.

[Al2] ELH. ALAARABIOU, *Calcul fonctionnel et puissance fractionnaire d'opérateurs linéaires multivoques non négatifs*, Pub. Math. Besançon, An. non linéaire, fasc. 13, 1991.

[Ar] R. ARENS, Operational calculus of linear relations, *Pacific J. Math.* **11** (1961), 9-23.

[Ba] A. V. BALAKRISHNAN, Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them, *Pacific J. Math.* **10** (1960), 419-437.

[BBD] C. BERG, K. BOYADZHIEV and R. DELAUBENFELS, Generation of holomorfic semigroups, *J. Austral. Math. Soc.* (Series A) **55** (1993), 246-269.

[BL] Z. BOULMAAROUF and J-PH. LABROUSSE, The Cayley transform of linear relations, *J. Egyptian Math. Soc.* **2** (1994), 53-65.

[Br1] H. BRÉZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Notas de Matemática, Vol. 50, North-Holland-Elsevier, Amsterdam-London-New York, 1973.

[Br2] H. BRÉZIS, *Análisis funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[CS] R. W. CARROLL and R. SHOWALTER, *Singular and degenerate Cauchy problems*, Academic Press, New York, 1976.

[CP] R. W. CROSS and P. PILLAY, Obiquitous properties of certain operational quantities of linear relations in normed spaces, *Quaestiones Mathematicae* **17** (1994), 487-498.

[DS] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear operators, part. I*, Interscience, New York, 1958.

[Er] A. ERDÉLYI, *Tables of integral transforms*, Vol. II, MacGraw-Hill, New York, 1954.

[FY1] A. FAVINI and A. YAGI, Multivalued linear operators and degenerate evolution equations, *Annali Mat. Pura App.* (IV), **163** (1993), 353-384.

[FY2] A. FAVINI and A. YAGI, Abstract second order differential equations with applications, *Funkcial. Ekvac.* **38** (1995), 81-99.

[Fo] G. B. FOLLAND, *Real analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[GG] V. I. GORBACHUC and M. L. GORBACHUC, *Boundary value problems for operator differential equations, mathematics and its applications* (Soviet Series), Vol. 48, Kluwer Academic Publishers, 1984.

[Ha] A. HARAUX, *Nonlinear evolution equations-global behavior of solutions*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[HP] E. HILLE and R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, Providence, R. I., 1957.

[Hi1] F. HIRSCH, Intégrales de résolvants et calcul symbolique, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble **22**, Fasc. 4 (1972), 239-264.

[Hi2] F. HIRSCH, Familles d'opérateurs potentiels, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble **25**, Fasc. 3 (1975), 263-288.

[Hi3] F. HIRSCH, Domaines d'operateurs representés comme integrales de résolvents, *J. Funct. Anal.* **23**, No 3 (1976), 199-217.

[Hi4] F. HIRSCH, Extention des propietés des puissances fractionaires, Seminaire du theorie du potenciel, Lecture notes in Math., Springer-Verlag, 563, 100-120, 1977.

[Ke] J. L. KELLEY, *Topología general*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1975.

[Ko1] H. KOMATSU, Fractional powers of operators, *Pacific J. Math.* **19** (1966), 285-346.

[Ko2] H. KOMATSU, Fractional powers of operators, III. Negative powers, *J. Math. Soc. Japan* **21** (1969), 205-220.

[Ko3] H. KOMATSU, Fractional powers of operators, V. Dual operators, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **17** (1970), 373-396.

[Ka] A. M. KRALL, Stieltjes differential-boundary operators III, multivalued operators-linear relations, *Pacific J. Math.* **59** (1975), 125-134.

[MSM] C. MARTÍNEZ, M. A. SANZ and L. MARCO, Fractional powers of operators, *J. Math. Soc. Japan* **40**, No 2 (1988), 331-347.

[MS1] C. MARTÍNEZ and M. A. SANZ, Fractional powers of non-densely defined operators, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) **23**, Fasc. 3 (1991), 443-454.

[MS2] C. MARTÍNEZ and M. A. SANZ, *Fractional powers of non-negative operators*, Elsevier-Science Publishers, B. V. North-Holland Mathematics Studies, to appear.

[Pu1] E. I. PUSTYL'NIK, Absolutely concave functions of positive operators, *Dokl. Akad. Nauk.* SSSR **228**, No 5 (1976), 547-550 (Russian) (English translation in *Soviet Math. Dokl.* **17**, No 3 (1976), 783-787).

[Pu2] E. I. PUSTYL'NIK, On functions of a positive operators, *Mat. Sbornik.* **119**, No 1 (1982), 32-47 (Russian) (English translation in *Math. USSR-Sb.* **47** (1984), 27-42).

[Ru] W. RUDIN, *Análisis funcional*, Reverté, Barcelona, 1979.

[Wi] D. V. WIDDER, *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1946.

[Ya] A. YAGI, Generation theorem of semigroup for multivalued linear operators, *Osaka J. Math.* **28** (1991), 385-410.

[Yo] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

UNIVERSIDAD DE VALENCIA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de D. Vicente Javier Pastor Murcia la calificación de APTO CUM LAUDE

Valencia, a 10 de Septiembre de 1996

El Secretario,

El Presidente